Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
«МЕЖДУНАРОДНЫЙ ВОСТОЧНО-ЕВРОПЕЙСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
Пушкинская ул., д. 268, 426008, г. Ижевск. Тел.: (3412) 77-68-24. E-mail: mveu@mveu.ru, www. mveu.ru
ИНН 1831200089. ОГРН 1201800020641

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по организации и методическому сопровождению самостоятельной работы студентов

ЕН.01 Математика

по специальности

42.02.01 Реклама

2023

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПО ПЛАНИРОВАНИЮ И ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1.1. Методические рекомендации по организации и методическому сопровождению самостоятельной работы обучающихся разработаны согласно Федеральному закону Российской Федерации от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации"; Федеральному государственному образовательному стандарту среднего профессионального образования (по специальности); Приказу Минпросвещения России от 24.08.2022 N 762 "Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам среднего профессионального образования", Положения об организации самостоятельной работы студентов, Методических рекомендаций по организации и методическому сопровождению самостоятельной работы студентов СПО.

1.2. Обоснование расчета времени, затрачиваемого на выполнение внеаудиторной самостоятельной работы обучающимися:

Преподаватель эмпирически определяет затраты времени на самостоятельное выполнение конкретного содержания учебного задания: на основании наблюдений за выполнением обучающимися аудиторной работы, опроса обучающихся о затратах времени на то или иное задание, хронометража собственных затрат на решение той или иной задачи из расчета уровня знаний и умений студентов. По совокупности затрачиваемых усилий и в зависимости от трудоемкости выполняемых заданий, определяется количество часов на выполнение каждого задания по самостоятельной работе. По совокупности заданий определяется объем времени на внеаудиторную самостоятельную работу по каждой теме и в целом по учебной дисциплине.

2. ВИДЫ И ФОРМЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ.

2.1. Учебной дисциплиной ЕН.01 Математика предусмотрен следующий объем самостоятельной работы обучающихся:

Вид самостоятельной работы студентов	Объем часов (очно)
Внеаудиторная самостоятельная работа	32

2.2. Формы самостоятельной работы, виды заданий по учебным темам:

Самостоятельная работа №1. Функция. Теория пределов, объем часов – 8.

Задание 1. Составление краткого алгоритма нахождения области определения функций (на конкретных функциях) – составить краткий алгоритм нахождения области определения функций на конкретных функциях.

Задание 2. Составить краткую таблицу раскрытия неопределенностей вида: 0/0; 0/0, зависящей от иррациональности; ∞/∞ ; $\infty-\infty$; $0 \cdot \infty$; 1^{∞} ; 0^{0} ; ∞^{∞} .

Задание 3. Решение задач на вычисление пределов; решение задач на определение непрерывности и нахождение точек разрыва.

1)Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \square$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{-0,5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \square$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \square$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \square$; ж) $\lim\limits_{x\to 0} \square$; з) $\lim\limits_{x\to 2} \square$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty} \square$; к) $\lim\limits_{x\to\infty} x(-x)$

1) исследовать функцию $f(x)=\frac{x}{1-x}$ на непрерывность в точке $x_0=1$.

Задание 4. Ответить на вопросы:

1.Что называют пределом функции f(x) в точке x_0?
2.Что называют пределом функции f(x) в точке x_0 слева?
3. Что называют пределом функции f(x) в точке x_0 справа?
4.Что называют пределом функции f(x) на бесконечности?
5.Сформулируйте свойства функций имеющих предел.
6.Расскажите об основных неопределенностях и методах их раскрытия.
7. Запишите формулы для первого и второго замечательных пределов.

Задание 5. Задачи для самостоятельного решения:

1) Доказать, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+3}=\frac{3}{2}$. Найти номер элемента последовательности, начиная с которого последовательность отличается от своего предела не более, чем на 0,001.

2) Доказать, что последовательность $\left\{n^3\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\middle| n\ge 1\right\}$ является неограниченной, но не является бесконечно большой.

3) Доказать, что последовательность $\left\{x_n \middle| n\ge 1\right\}$ имеет предел.

4) Доказать, что последовательность $\left\{u_n \middle| n\ge 1\right\}$

5) Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

6) Вычислить предел функции

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$. б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$ в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}$

д) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}$.

7) Найти точки разрыва функции

а) $y=\frac{x}{x^2-1}$. б) $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$. в) $y=2\frac{|x+3|}{x+3}x+6$.

8) Найти точки разрыва функции если они существуют. Вычислить скачок функции в точке разрыва. Построить график функции $y=2x-\frac{x-2}{|x-2|}$.

9) Записать все точки разрыва (слева направо), указывая следом за точкой тип разрыва (1; 2; у), для функции $f_1(x)=\frac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}}+\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

10) Функция y=f(x) задана различными аналитическими выражениями в различных областях изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.

$$f(x)=\begin{cases}2 & при \quad x<-1,\\ 2-2x & при \quad -1\le x<1,\\ \ln x & при \quad 1\le x.\end{cases}$$

Форма контроля: устный опрос, проверка домашнего задания.

Методические указания по ходу выполнения работы
Предел функции

Пусть функция y=f(x) имеет своим пределом число А: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ =A, причем f(x) изменяется в зависимости от изменения переменной x. Необходимо учитывать, что при неограниченном стремлении переменной x к числу a (x→a) само число a исключается из значений, принимаемых переменной x. Дадим определение предела функции в точке.

Число А называется пределом функции f(x) в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ =А, если для любого числа ε >0 существует число δ>0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|$<δ, где $x\neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

При вычислении пределы функции используются теоремы, которые формулируются без доказательств.

Теорема 1. Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Теорема 2. Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Теорема 3. Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, предел функции φ(x) отличен от нуля, то существует также предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, равный отношению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left(kf(x)\right)=k\lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. Если n – натуральное число, то справедливы соотношения:

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n,\quad \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$$

Следствие 3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$F(x)=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n$

при x→a равен значению этого многочлена при x=a, т.е.

$$F(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

при x→c равен значению этой функции при x=c, если c принадлежит области определения этой функции, т.е.

$$\lim_{x\to c} F(x)=F(c).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел $\square\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Второй замечательный предел $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e}$

При замене y = 1/x, найдем x=1/y; при $x\to\infty$ $y\to 0$.

В результате получается еще одна запись числа *e:* $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

Общие правила раскрытия неопределенностей

1. $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. При вычислении пределов дробно-рациональных функций

$$\frac{R_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\frac{a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{b_0(x-x_1')(x-x_2')\ldots(x-x_m')}$$

надо числитель и знаменатель дроби разложить на множители так, чтобы можно было сократить.

2. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.Разделим числитель и знаменатель дроби на **x** в максимальной степени в $R_n(x)$.

3. $[\infty - \infty]$. Проведем вычитание дробей или умножим числитель и знаменатель разности на сопряженный двучлен.

4. $\sqrt{\ldots}$ Для того чтобы избавится от двучленов с корнями можно умножить их на сопряженные двучлены.

5. $[1^{\infty}]$. Используем второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Пример. Найти указанные пределы (не используя правило Лопиталя).

а). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$ **;** **б)**. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{6x^2+5x+4}$ **;**

в). $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; **г)**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; **д)**. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+2}\right)^{7x+3}$.

Решение.

а). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$ **.** Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=3 приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$**.** Чтобы раскрыть эту неопределенность разложим числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, и сократим члены дроби на общий множитель (x – 3). Так как аргумент x только стремится к своему предельному значению 3 , но не совпадает с ним, то множитель (x – 3) отличен от нуля при $x \to 3$. Будем иметь: $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{(x-2)(x-3)}{3x(x-3)} = 1/9$.

б). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^2+5x+4}$. При $x \to \infty$ имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 ($x^2 \neq 0$ при $x \to \infty$).

Получим: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^2+5x+4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+2/x-1/x^2}{6+5/x+4/x^2} = 3/6$ (по свойствам пределов).

в). $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{1}{x-3}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{3-x}{(x-3)(x+3)} = -1/6$

г). $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Непосредственная подстановка x=0 дает неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{x+1}+1\right)$. Имеем:

$$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 1/2$$

.

д). $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x+2}\right)^{7x+3}$. При $x \to \infty$ основание $\dfrac{5x+1}{5x+2}$ стремится к I, показатель степени 7x+3 стремится к ∞. Следовательно имеем неопределенность вида **[**1^∞ **]**. Используем второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Представим основание в виде суммы I и некоторой бесконечной малой величины $\dfrac{5x+1}{5x+2} = \dfrac{5x+2-1}{5x+2} = 1 + \dfrac{-1}{5x+2}$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}$

$$\left(\frac{5x+1}{5x+2}\right)^{7x+3} = = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{5x+2}\right)^{7x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{5x+2}\right)^{\frac{5x+2}{-1}}\right]^{\frac{-1\cdot(7x+3)}{5x+2}} =$$

$$= \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{5x+2}\right)^{\frac{5x+2}{-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1\cdot(7x+3)}{5x+2}} = e^{-\frac{7}{5}}$$

.

Непрерывность функции. Точки разрыва.
Как исследовать функцию на непрерывность?

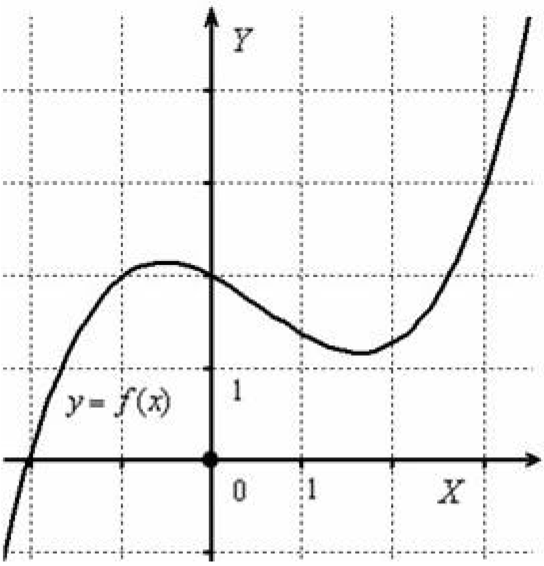
На данном уроке мы разберём понятие непрерывности функции, классификацию точек разрыва и распространённую практическую задачу **исследования функции на непрерывность**. Из самого названия темы многие интуитивно догадываются, о чём пойдёт речь, и думают, что материал довольно простой. Это правда. Но именно несложные задачи чаще всего наказывают за пренебрежение и поверхностный подход к их решению. Поэтому рекомендую очень внимательно изучить статью и уловить все тонкости и технические приёмы.

Что нужно знать и уметь? Не очень-то и много. Для качественного усвоения урока необходимо понимать, что такое предел функции.

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Понятие непрерывности функции

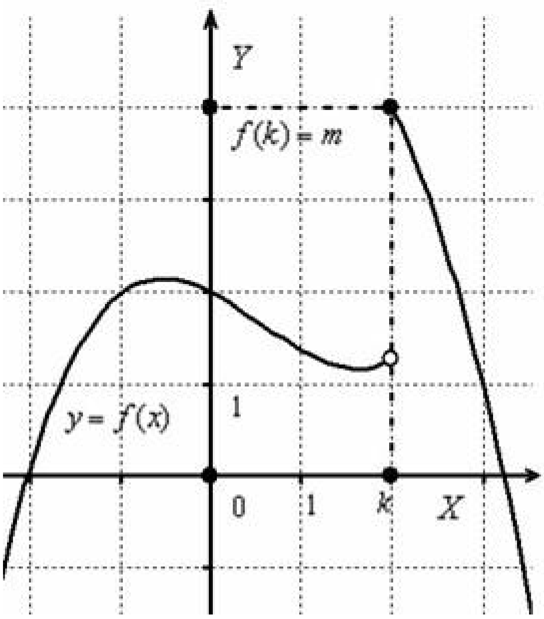
Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, непрерывную на всей числовой прямой:



Или, говоря лаконичнее, наша функция непрерывна на $\mathfrak{R}$ (множестве действительных чисел).

Каков «обывательский» критерий непрерывности? Очевидно, что график непрерывной функции можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги.

При этом следует чётко отличать два простых понятия: <u>**область определения функции**</u> и **непрерывность функции**. В общем случае <u>это не одно и то же</u>. Например:



Данная функция определена на всей числовой прямой, то есть для **каждого** значения «икс» существует своё значение «игрека» $y = f(x)$. В частности, если $x = k$, то $y = f(k) = m$. Заметьте, что другая точка выколота, ведь по определению функции, значению аргумента должно соответствовать **единственное** значение функции. Таким образом, область определения нашей функции: $D(f) = \Re$.

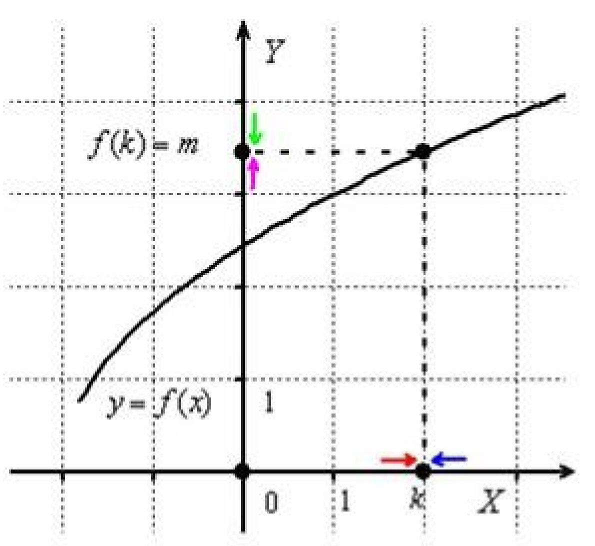
Однако **эта функция не является непрерывной на $\Re$!** Совершенно очевидно, что в точке $x = k$ она терпит **разрыв**. Термин тоже вполне вразумителен и нагляден, действительно, карандаш здесь по любому придётся оторвать от бумаги. Немного позже мы рассмотрим классификацию точек разрыва.

Непрерывность функции в точке и на интервале

В той или иной математической задаче речь может идти о непрерывности функции в точке, непрерывности функции на интервале, полуинтервале или непрерывности функции на отрезке. То есть, **не существует «просто непрерывности»** – функция может быть непрерывной ГДЕ-ТО. И основополагающим «кирпичиком» всего остального является **непрерывность функции <u>в точке</u>**.

Теория математического анализа даёт определение непрерывности функции в точке с помощью «дельта» и «эпсилон» окрестностей, но на практике в ходу другое определение, которому мы и уделим самое пристальное внимание.

Сначала вспомним **односторонние пределы**, ворвавшиеся в нашу жизнь на первом уроке о графиках функций. Рассмотрим будничную ситуацию:



Если приближаться по оси OX к точке k **слева** (красная стрелка), то соответствующие значения «игреков» будут идти по оси OY к точке m (малиновая стрелка). Математически данный факт фиксируется с помощью **левостороннего предела**:
$\lim\limits_{x \to k-0} f(x) = m$

Обратите внимание на запись $x \to k - 0$ (читается «икс стремится к ка слева»). «Добавка» «минус ноль» символизирует *бесконечно малое отрицательное число*, по сути это и обозначает, что мы подходим к числу k с левой стороны.

Аналогично, если приближаться к точке «ка» **справа** (синяя стрелка), то «игреки» придут к тому же значению m, но уже по зелёной стрелке, и **правосторонний предел** оформится следующим образом:
$\lim\limits_{x \to k+0} f(x) = m$

«Добавка» $+0$ символизирует *бесконечно малое положительное число*, и запись $x \to k + 0$ читается так: «икс стремится к ка справа».

Если односторонние пределы конечны и равны (как в нашем случае): $\lim\limits_{x \to k-0} f(x) = \lim\limits_{x \to k+0} f(x) = m$, то будем говорить, что существует ОБЩИЙ предел $\lim\limits_{x \to k} f(x) = m$. Всё просто, общий предел – это наш «обычный» **<u>предел функции</u>**, равный конечному числу.

Заметьте, что если функция не определена при $x = k$ (выколите чёрную точку на ветке графика), то перечисленные выкладки остаются справедливыми. Как уже неоднократно отмечалось, в частности, в статье о бесконечно малых функциях, выражения $x \to k+0, \quad x \to k-0, \quad x \to k$ означают, что «икс» *бесконечно близко* приближается к точке k, при этом **НЕ ИМЕЕТ ЗНАЧЕНИЯ**, определена ли сама функция в данной точке или нет. Хороший пример встретится в следующем параграфе, когда анализу подвергнется функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Определение: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$.

Определение детализируется в следующих условиях:

1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim_{x \to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim_{x \to k-0} f(x) = \lim_{x \to k+0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$.

!!! Рекомендую законспектировать пункты, поскольку они потребуются для решения практических задач. Далее по тексту они будут отмечаться как Условие №1, Условие №2 и Условие №3.

Если нарушено **хотя бы одно** из трёх условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке k.

Непрерывность функции на интервале формулируется остроумно и очень просто: функция непрерывна на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Классификация точек разрыва

Увлекательная жизнь функций богата всякими особенными точками, и точки разрыва лишь одна из страничек их биографии.

Примечание*: на всякий случай остановлюсь на элементарном моменте: точка разрыва – это всегда <u>отдельно взятая точка</u> – не бывает «несколько точек разрыва подряд», то есть, нет такого понятия, как «интервал разрывов».*

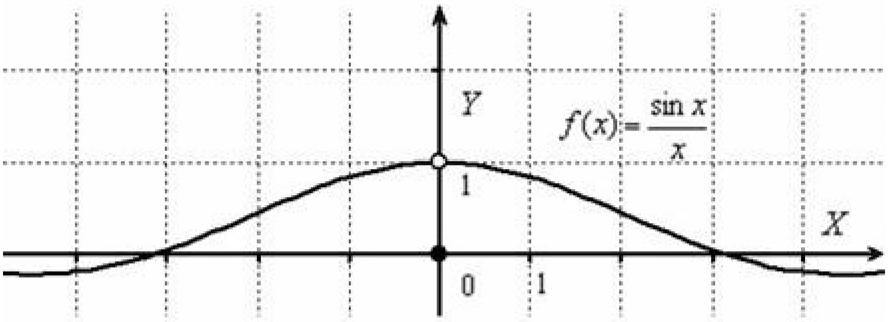
Данные точки в свою очередь подразделяются на две большие группы: **разрывы первого рода** и **разрывы второго рода**. У каждого типа разрыва есть свои характерные особенности, которые мы рассмотрим прямо сейчас:

Точка разрыва первого рода

Если в точке k нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>конечны</u>**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

Начнём с самого оптимистичного случая. По первоначальной задумке урока я хотел рассказать теорию «в общем виде», но чтобы продемонстрировать реальность материала, остановился на варианте с конкретными действующими лицами.

Уныло, как фото молодожёнов на фоне Вечного огня, но нижеследующий кадр общепринят. Изобразим на чертеже график функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:



Данная функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=0$. И в самом деле, знаменатель же не может быть равен нулю. Однако в соответствии со смыслом предела – мы можем *бесконечно близко* приближаться к «нулю» и слева и справа, то есть, односторонние пределы существуют и, очевидно, совпадают:

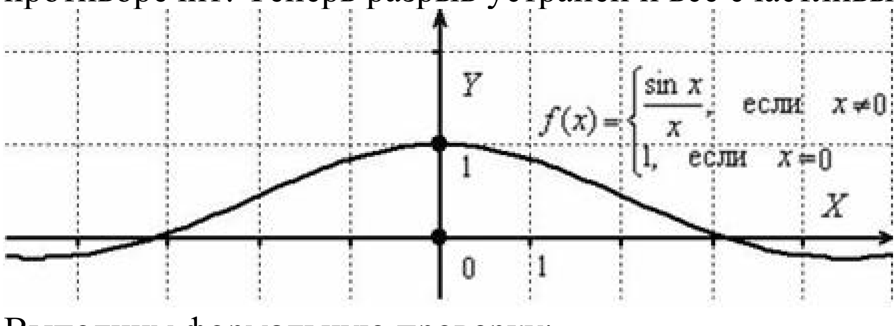
$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$ (Условие №2 непрерывности выполнено).

Но функция не определена в точке $x=0$, следовательно, нарушено Условие №1 непрерывности, и функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ терпит разрыв в данной точке.

Разрыв такого вида (с существующим общим пределом) называют **устранимым разрывом**. Почему устранимым? Потому что функцию можно доопределить в точке разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{если} \quad x=0\end{cases}$$

Странно выглядит? Возможно. Но такая запись функции ничему не противоречит! Теперь разрыв устранён и все счастливы:



Выполним формальную проверку:

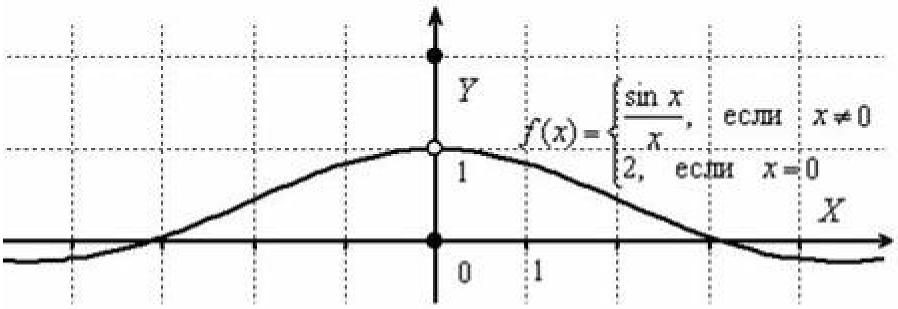
1) $f(0)=1$ – функция определена в данной точке;

2) $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$ – общий предел существует;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=f(0)$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, все три условия выполнены, и функция непрерывна в точке $x = 0$ по определению непрерывности функции в точке.

Впрочем, ненавистники матана могут доопределить функцию нехорошим способом, например $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 2, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$:



Любопытно, что здесь выполнены первые два условия непрерывности:
1) $f(0) = 2$ – функция определена в данной точке;
2) $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – общий предел существует.

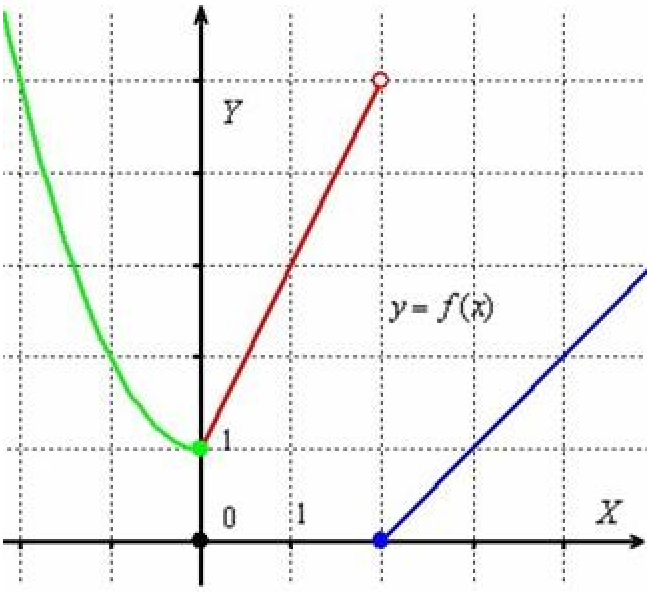
Но третий рубеж не пройден: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \neq f(0)$, то есть предел функции в точке **не равен** значению данной функции в данной точке.

Таким образом, в точке $x = 0$ функция терпит разрыв.

Второй, более грустный случай носит название **разрыва первого рода со скачком**. А грусть навевают односторонние пределы, которые конечны и различны. Пример изображён на втором чертеже урока. Такой разрыв возникает, как правило, в **кусочно-заданных функциях**.

Рассмотрим кусочную функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если} \quad x \leq 0 \\ 1 + 2x, & \text{если} \quad 0 < x < 2 \\ x - 2, & \text{если} \quad x \geq 2 \end{cases}$ и выполним её чертёж. Как построить график? Очень просто. На полуинтервале $(-\infty; 0]$ чертим фрагмент параболы $f(x) = x^2 + 1$ (зеленый цвет), на интервале $(0; 2)$ – отрезок прямой $f(x) = 1 + 2x$ (красный цвет) и на полуинтервале $[2; +\infty)$ – прямую $f(x) = x - 2$ (синий цвет).

При этом в силу неравенства $x \leq 0$ значение $f(0)$ определено для квадратичной функции $f(x) = x^2 + 1$ (зелёная точка), и в силу неравенства $x \geq 2$, значение $f(2)$ определено для линейной функции $f(x) = x - 2$ (синяя точка):



В самом-самом тяжёлом случае следует прибегнуть к поточечному построению каждого куска графика .

Сейчас нас будет интересовать только точка $x = 2$. Исследуем её на непрерывность:

1) $f(2) = 2 - 2 = 0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы.

Слева у нас красный отрезок прямой, поэтому левосторонний предел: $\lim\limits_{x \to 2-0}(1 + 2x) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

Справа – синяя прямая, и правосторонний предел: $\lim\limits_{x \to 2+0}(x - 2) = 2 - 2 = 0$

В результате получены *конечные числа*, причем они *не равны*. Поскольку односторонние пределы конечны и различны: $\lim\limits_{x \to 2-0}(1 + 2x) \neq \lim\limits_{x \to 2+0}(x - 2)$, то наша функция терпит разрыв первого рода со скачком.

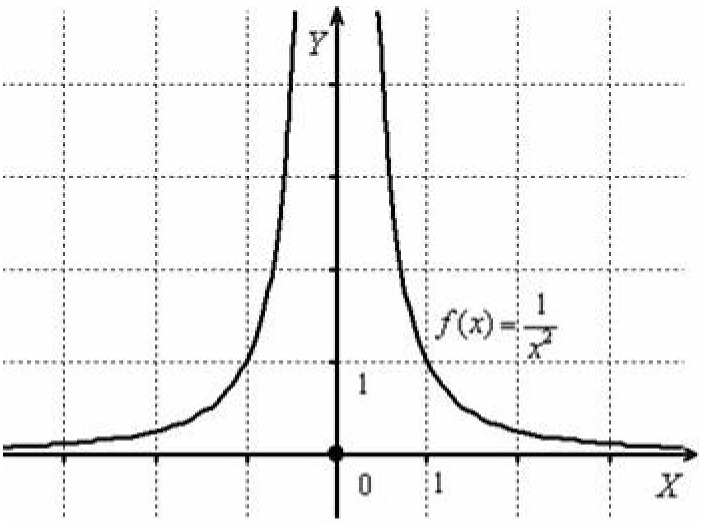
Логично, что разрыв не устраним – функцию действительно не доопределить и «не склеить», как в предыдущем примере.

Точки разрыва второго рода

Обычно к данной категории хитро относят все остальные случаи разрыва. Всё перечислять не буду, поскольку на практике в 99%-ти процентах задач вам встретится **бесконечный разрыв** – когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

И, конечно же, самая напрашивающаяся картинка – гипербола в точке ноль. Здесь оба односторонних предела бесконечны: $\lim\limits_{x \to 0-0}\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0}\frac{1}{x} = +\infty$, следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ терпит разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Я стараюсь наполнять свои статьи максимально разнообразным содержанием, поэтому давайте посмотрим на график функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$, который ещё не встречался:



Исследуем на непрерывность точку $x=0$ по стандартной схеме:

1) Функция не определена в данной точке, поскольку знаменатель обращается в ноль.

Конечно, можно сразу сделать вывод о том, что функция терпит разрыв в точке $x=0$, но хорошо бы классифицировать характер разрыва, что часто требуется по условию. Для этого:

2) Вычислим односторонние пределы:

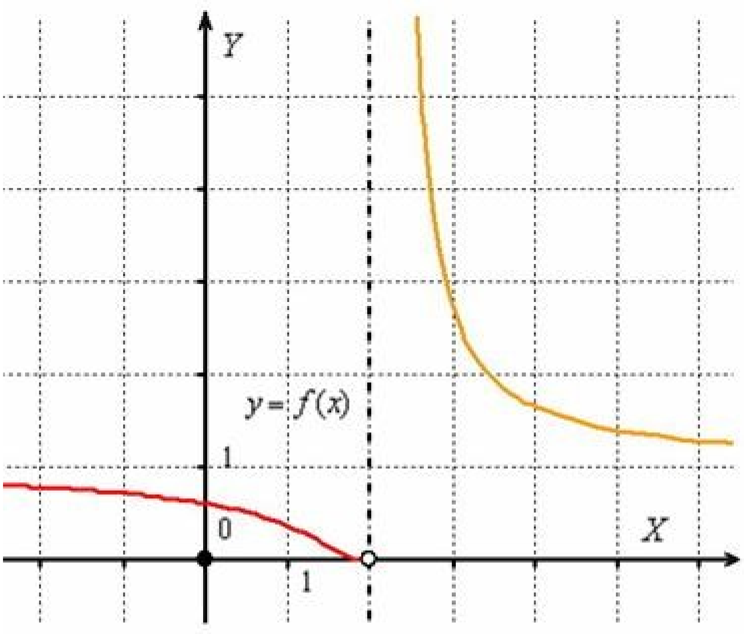
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(+0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

Напоминаю, что под записью -0 понимается *бесконечно малое отрицательное число*, а под записью $+0$ – *бесконечно малое положительное число*.

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ терпит разрыв 2-го рода в точке $x=0$. Ось ординат является **вертикальной асимптотой** для графика.

Не редка ситуация, когда оба односторонних предела существуют, но бесконечен только один из них, например:



Это график функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$.

Исследуем на непрерывность точку $x = 2$:

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2-0-2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2+0-2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

О методике вычисления таких односторонних пределов поговорим в двух последних примерах лекции, хотя многие читатели всё уже увидели и догадались.

Левосторонний предел конечен и равен нулю (в саму точку мы «не заходим»), но правосторонний предел бесконечен и оранжевая ветка графика бесконечно близко приближается к своей **вертикальной асимптоте**, заданной уравнением $x = 2$ (чёрный пунктир).

Таким образом, функция $y = f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ терпит **разрыв второго рода** в точке $x = 2$.

Как и для разрыва 1-го рода, в самой точке разрыва функция может быть определена. Например, для кусочной функции $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$ смело ставим чёрную жирную точку в начале координат. Справа же – ветка гиперболы, и правосторонний предел бесконечен. Думаю, почти все представили, как выглядит этот график.

То, чего все с нетерпением ждали:

Как исследовать функцию на непрерывность?

Исследование функции на непрерывность в точке проводится по уже накатанной рутинной схеме, которая состоит в проверке трёх условий непрерывности:

Пример 1

Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$ на непрерывность. Определить характер разрывов функции, если они существуют. Выполнить чертёж.

Решение:

1) Под прицел попадает единственная точка $x = 1$, в которой функция не определена.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x^2) = 1$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x^2) = 1$$

Односторонние пределы конечны и равны.

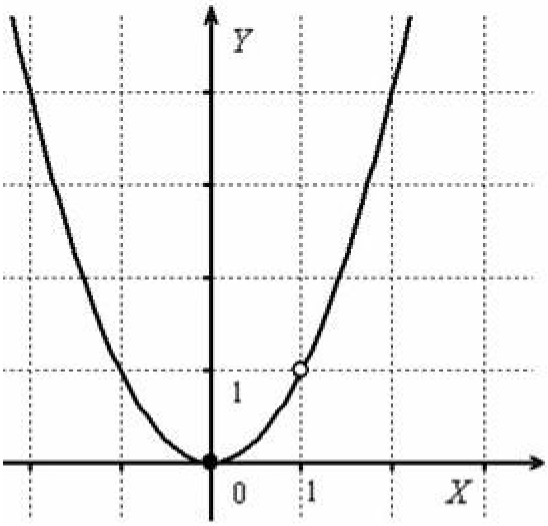
Таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит устранимый разрыв.

Как выглядит график данной функции?

Хочется провести упрощение $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x-1} = \dfrac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2$, и вроде бы получается обычная парабола. **НО** исходная функция не определена в точке $x = 1$, поэтому обязательна следующая оговорка:

$f(x) = x^2, \quad \text{если} \quad x \neq 1$

Выполним чертёж:



Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 1$, в которой она терпит устранимый разрыв.

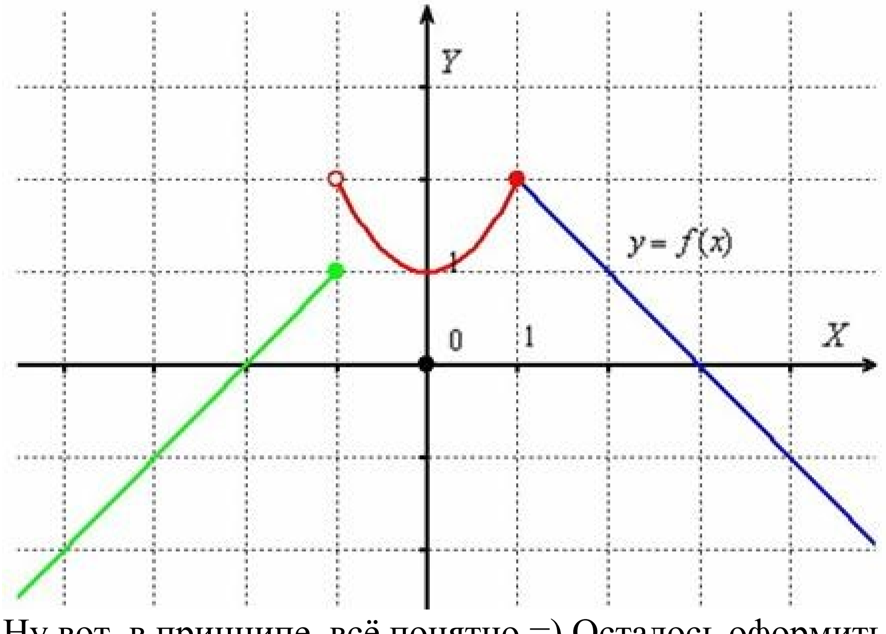
Функцию можно доопределить хорошим или не очень способом, но по условию этого не требуется.

Вы скажете, пример надуманный? Ничуть. Десятки раз встречалось на практике. Почти все задачи сайта родом из реальных самостоятельных и контрольных работ.

Пример 2

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если } x>1 \end{cases}$.

Решение: очевидно, что все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах, поэтому осталось проверить только две точки «стыка» между кусками. Сначала выполним чертёж на черновике, технику построения я достаточно подробно закомментировал в первой части статьи. Единственное, необходимо аккуратно проследить за нашими особенными точками: в силу неравенства $x\le -1$ значение $x=-1$ принадлежит прямой $f(x)=x+2$ (зелёная точка), и в силу неравенство $x\le 1$ значение $x=1$ принадлежит параболе $f(x)=x^2+1$ (красная точка):



Ну вот, в принципе, всё понятно =) Осталось оформить решение. Для каждой из двух «стыковых» точек стандартно проверяем 3 условия непрерывности:

I) Исследуем на непрерывность точку $x=-1$

1) $f(-1)=-1+2=1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+2)=1$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+1)=1+1=2$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x=-1$.

Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов: $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = 2-1=1$, то есть, график рванул на одну единицу вверх.

II) Исследуем на непрерывность точку $x=1$

1) $f(1)=1^2+1=2$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x^2+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(-x+3)=-1+3=2$$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ – односторонние пределы конечны и равны, значит, существует общий предел.

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)=2$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=1$ по определению непрерывности функции в точке.

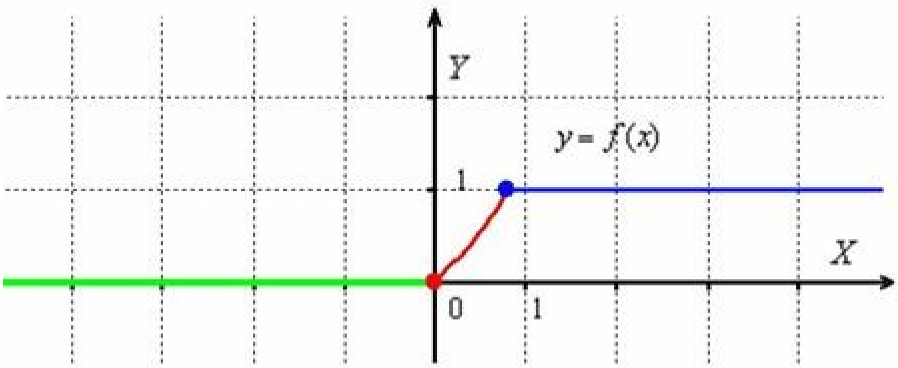
На завершающем этапе переносим чертёж на чистовик, после чего ставим финальный аккорд:

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=-1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

Пример 3

Дана функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ tgx, & 0\le x<\frac{\pi}{4} \\ 1, & x\ge \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Исследовать функцию на непрерывность в точках $x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$. Построить график.

Решение: и снова сразу выполним чертёж на черновике:



Особенность данного графика состоит в том, что при $x < 0$ кусочная функция задаётся уравнением оси абсцисс $y = f(x) = 0$. Здесь данный участок прорисован зелёным цветом, а в тетради его обычно жирно выделяют простым карандашом. И, конечно же, не забываем про наших баранов: значение $x = 0$ относится к ветке тангенса (красная точка), а значение $x = \frac{\pi}{4}$ принадлежит прямой $y = f(x) = 1$.

Из чертежа всё понятно – функция непрерывна на всей числовой прямой, осталось оформить решение, которое доводится до полного автоматизма буквально после 3-4 подобных примеров:

I) Исследуем на непрерывность точку $x = 0$

1) $f(0) = tg0 = 0$ – функция определена в данной точке.

2) Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (tgx) = tg0 = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, значит, общий предел существует.

На всякий пожарный напомню тривиальный факт: предел константы равен самой константе. В данном случае предел нуля равен самому нулю (левосторонний предел).

Едем дальше:

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ по определению непрерывности функции в точке.

II) Исследуем на непрерывность точку $x = \frac{\pi}{4}$

1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}-0} (tgx) = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}+0} 1 = 1$$

И здесь – предел единицы равен самой единице.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+0} f(x)$ – общий предел существует.

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$ по определению непрерывности функции в точке.

Как обычно, после исследования переносим наш чертёж на чистовик.

Ответ: функция непрерывна в точках $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$.

Обратите внимание, что в условии нас ничего не спрашивали про исследование всей функции на непрерывность, и хорошим математическим тоном считается формулировать **точный и чёткий** ответ на поставленный вопрос. Кстати, если по условию не требуется строить график, то вы имеете полное право его и не строить (правда, потом преподаватель может заставить это сделать).

Пример 4

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$ и построить её схематический график.

Решение: нехорошие точки очевидны: $x = -1$ (обращает в ноль знаменатель показателя) и $x = 3$ (обращает в ноль знаменатель всей дроби). Малопонятно, как выглядит график данной функции, а значит, сначала лучше провести исследование:

I) Исследуем на непрерывность точку $x = -1$

1) Функция не определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x} = \frac{2^{\frac{1}{-1-0+1}}}{3-(-1-0)} = \frac{2^{\frac{1}{-0}}}{4} = \frac{2^{-\infty}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Обратите внимание на **типовой приём вычисления одностороннего предела**: в функцию вместо «икса» мы подставляем $-1-0$. В знаменателе никакого криминала: «добавка» «минус ноль» не играет роли, и получается «четыре». А вот в числителе происходит небольшой триллер: сначала в знаменателе показателя $\frac{1}{-1-0+1}$ убиваем –1 и 1, в результате чего получается $2^{\frac{1}{-0}}$. Единица, делённая на *бесконечно малое отрицательное число*, равна «минус бесконечности», следовательно: $2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty}$. И, наконец, «двойка» в *бесконечно большой* *отрицательной степени* равна нулю: $2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=0$. Или, если ещё подробнее: $2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=0$.

Вычислим правосторонний предел:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}=\frac{2^{\frac{1}{-1+0+1}}}{3-(-1+0)}=\frac{2^{\frac{1}{+0}}}{4}=\frac{2^{+\infty}}{4}=+\infty$$

И здесь – вместо «икса» подставляем $-1+0$. В знаменателе «добавка» $+0$ снова не играет роли: $3-(-1+0)=3+1-0=4$. В числителе проводятся аналогичные предыдущему пределу действия: уничтожаем противоположные числа и делим единицу на *бесконечно малое положительное число*: $2^{\frac{1}{-1+0+1}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty$

Правосторонний предел бесконечен, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x=-1$.

II) Исследуем на непрерывность точку $x=3$

1) Функция не определена в данной точке.

2) Вычислим левосторонний предел:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}=\frac{2^{\frac{1}{3-0+1}}}{3-(3-0)}=\frac{2^{\frac{1}{4}}}{3-3+0}=\frac{\sqrt[4]{2}}{+0}=+\infty$$

Метод такой же: подставляем в функцию вместо «икса» $3-0$. В числителе ничего интересного – получается конечное положительно число $\sqrt[4]{2}$. А в знаменателе раскрываем скобки, убираем «тройки», и решающую роль играет «добавка» $+0$.

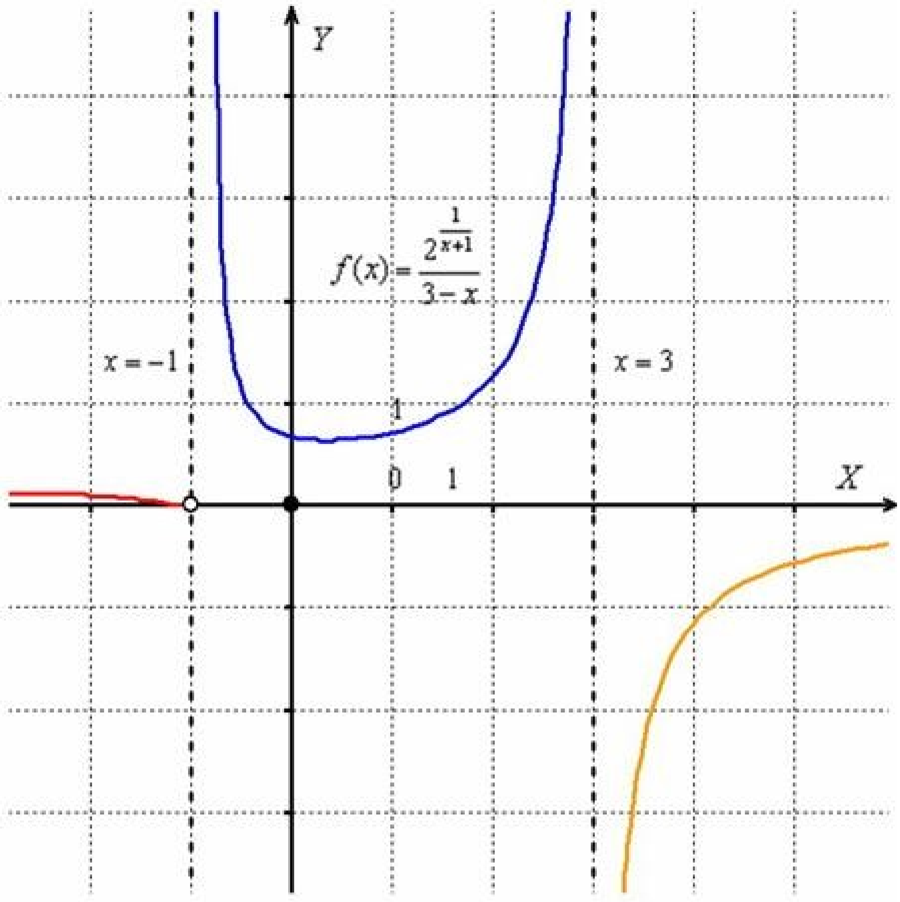
По итогу, конечное положительное число, делённое на *бесконечно малое положительное число*, даёт «плюс бесконечность»: $\frac{\sqrt[4]{2}}{+0}=+\infty$.

Правосторонний предел, как брат близнец, за тем лишь исключением, что в знаменателе выплывает *бесконечно малое отрицательное число*:

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}=\frac{2^{\frac{1}{3+0+1}}}{3-(3+0)}=\frac{2^{\frac{1}{4}}}{3-3-0}=\frac{\sqrt[4]{2}}{-0}=-\infty$$

Односторонние пределы бесконечны, значит, функция терпит разрыв 2-го рода в точке $x=3$.

Таким образом, у нас две точки разрыва, и, очевидно, три ветки графика. Для каждой ветки целесообразно провести поточечное построение, т.е. взять несколько значений «икс» и подставить их в $\frac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$. Заметьте, что по условию допускается построение <u>схематического</u> чертежа, и такое послабление естественно для ручной работы. Я строю графики с помощью проги, поэтому не имею подобных затруднений, вот достаточно точная картинка:



Прямые $x=-1,\ x=3$ являются **<u>вертикальными асимптотами</u>** для графика данной функции.

Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точек $x=-1,\ x=3$, в которых она терпит разрывы 2-го рода.

Самостоятельная работа № 2. Дифференциальное исчисление, объем часов 4.

Задание 1. Решение задач на нахождение производной функции (простой, сложной):

Найдите производную функций:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3}$, 2) $f(x) = (x^2 – e^x)^5$, 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^9} - 5x^4 + \dfrac{6}{\sqrt{x}} - 3$,

4) $f(x) = x^5 \ln x$, 5) $f(x) = \sqrt{x} - x^2 – 2^x$

6 $f(x)=x^5 – \sin x$ 7) $f(x)=x^4 + \cos(x+3x^2$

Задание 2. Решение задач на нахождения монотонности и экстремума функции, промежутков выпуклости и точек перегиба, нахождение асимптот

Исследовать функцию и построить ее график: а) $y=x^3-6x^2$; б) $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

Задание 3. Составить алгоритм нахождения асимптот различных видов (наклонная, вертикальная, горизонтальная).

Задание 4. Ответить на вопросы:

1. Понятие производной функции.
2. Сформулируйте геометрический и физический смысл производной.
3. Перечислить основные правила дифференцирования функций.
4. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
5. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
6. Определение и условие монотонного возрастания (убывания) функции на промежутке;
7. Определение экстремальных точек, необходимое условие экстремума; какие точки называются подозрительными на экстремум?
8. Первое и второе достаточное условие существования экстремума;
9. Алгоритм исследования функции на экстремум;
10. Определение и условие выпуклости вверх (вниз) графика функции;
11. Определение точки перегиба, необходимый и достаточный признаки;
12. Определение наклонной асимптоты, ее уравнение, формулы для вычисления ее параметров;
13. Определение вертикальной асимптоты, ее уравнение;
14. Перечислить пункты общей схемы исследования функции и построения графика.

Форма контроля: устный опрос, проверка домашнего задания.

Методические указания по ходу выполнения работы

Определение производной

Важнейшее свойство материи - движение, пришло в математику в 17 веке через понятие переменной величины. Всякий реальный процесс описывают несколько переменных величин и они взаимозависимы.

Например, при движении тела происходит изменение времени t и пройденного пути S. Зависимость пройденного пути от затраченного времени определяется уравнением движения S = S(t). Движение может быть равномерным и неравномерным. Основные характеристики механического движения - скорость и ускорение.

Определение. Средняя скорость это отношение пройденного телом пути к затраченному времени.

$$V_{ср} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \qquad (1)$$

$V_{ср}$ дает точную характеристику равномерного прямолинейного движения и грубую оценку неравномерного. Чем меньше время измерения скорости, тем меньше отклонение движения от равномерного и выше качество оценки. Это обстоятельство приводит к понятию мгновенной скорости.

Определение. Мгновенная скорость есть средняя скорость взятая за бесконечно малый промежуток времени.

$$V_{мг} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} \qquad (2)$$

Обобщение понятия мгновенной скорости на случай произвольной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $[a,b]$, приводит к понятию производной.

Определение. Предел $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0. Пусть $x - x_0 \equiv \Delta x$ - приращение аргумента и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \equiv \Delta y$ – приращение функции, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) \qquad (3)$$

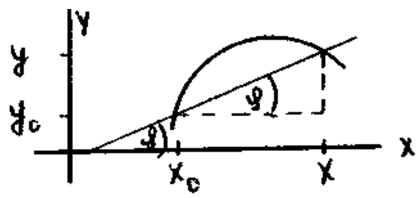
Определение. Производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента. (Коши 1820 г.)

Функция имеющая производную в некоторой точке **x** называется дифференцируемой в этой точке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Алгебраический смысл производной : производная в точке **x** показывает во сколько раз быстрее изменяется функция, чем аргумент в окрестностях этой точки, т.е. дает сравнение двух «точечных» параметров.

Физический смысл производной - скорость. Продифференцировать уравнение движения **S = S(t)** значить определить мгновенную скорость тела в каждый момент времени **t** .

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной.



На графике функции $y = f(x)$ имеем точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x;y)$. Прямая M_0M называется *секущей* и пересекает ось Ox под углом φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MK}{M_0K} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x \to x_0$ секущая становится касательной

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Вычисление производных

1. $f(x) = c$, $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$, $\Delta f / \Delta x = 0$, $\lim \Delta f / \Delta x = 0$

Производная от константы равна нулю.

2. $f(x) = kx + b$, $\Delta f = k\Delta x$, $\Delta f / \Delta x = k$, $\lim \Delta f / \Delta x = k$

Равномерному движению соответствует линейное уравнение движения.

3. $f(x) = 3x^2 + 6$, $\underbrace{\Delta f = 6}\, x\underbrace{\Delta x + 3}\, (\Delta x)^2$, $\Delta f / \Delta x = 6x + 3\Delta x$, $\lim \Delta f / \Delta x = 6x$

главная остаток
часть

Главная часть приращения функции, линейная по Δx, называется *дифференциалом* $6x\Delta x \equiv dy$. При переходе к пределу $\Delta x \to 0$ вклад в производную дает только главная часть. Поэтому операцию вычисления производной можно свести к процедуре разделения приращения функции на главную часть и остаток. Разделять, по латыни – дифференцировать. Отсюда обозначение Лейбница $f'(x) = dy / dx$: производная есть отношение двух дифференциалов $(3x^2 + 6)' = dy/dx = (6x\Delta x)/\Delta x = 6x$.

Правила дифференцирования

Доказанные выше теоремы образуют шесть правил дифференцирования:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1.}\ \mathbf{c' = 0};\\
&\mathbf{2.}\ \mathbf{(u + v)' = u' + v'}; \qquad (5)\\
&\mathbf{3.}\ \mathbf{(u v)' = u'v + u v'};\\
&\mathbf{4.}\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};\\
&\mathbf{5.}\ \mathbf{(c u)' = c (u)'};\\
&\mathbf{6.}\ \mathbf{y'_x = y'_u \cdot u'_x}
\end{aligned}$$

Таблица производных простейших элементарных функций

Значения производных от основных элементарных функций с независимым аргументом **x** и со сложным аргументом **u .**

1.	$(x^n)' = n x^{n-1}$	$(u^n)'_x = n u^{n-1} u'_x$
2.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'_x = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}$
3.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'_x = \frac{-u'_x}{u^2}$
4.	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)'_x = e^u u'_x$
5.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)'_x = a^u \ln a\, u'_x$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)_x = \frac{u'_x}{u \ln a}$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin x)'_x = \cos u\, u'_x$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos x)'_x = -\sin u\, u'_x$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (\operatorname{tg} u)'_x = \dfrac{u'_x}{\cos^2 u}$

11. $(\operatorname{ctg} x)` = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ $\qquad (\operatorname{ctg} u)'_x = \dfrac{-u'_x}{\sin^2 u}$

12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arcsin u)`_x = \dfrac{u`_x}{\sqrt{1-u^2}}$

13. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos u)'_x = \dfrac{-u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad (\operatorname{arctg} u)'_x = \dfrac{u'_x}{1+u^2}$

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ $\qquad (\operatorname{arcctg} u)'_x = \dfrac{-u'_x}{1+u^2}$

Дифференциал

При создании математического анализа основополагающим было понятие дифференциала. Приращения аргумента и функции рассматривались не как бесконечно малые величины, а как некоторые малые величины. Вычисление производной сводилось к разделению приращения функции на главную часть и остаток (1685г.)

По определению Коши (1820г.), производная есть предел отношения приращения функции Δ**y** к приращению аргумента Δ**x.** Если не переходить к пределу, но Δ**x** взять достаточно малой величиной , то отношение приращений можно также приближенно приравнять к производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}\approx f'(x)$$

или записать более точное выражение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)$ где α**(**Δ **x)** - бесконечно малая величина, и представить приращение функции в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Здесь первое слагаемое имеет первый порядка по Δ**x**, а второе слагаемое имеет более высокий порядок и вносит нулевой вклад в значение производной при $\Delta x\to 0$.

Определение. *Дифференциалом функции* **y = f(x)** в точке **x** называется *главная часть приращения функции*, линейная относительно Δ**x** , т.е.

$$dy = f'(x)\,\Delta x \quad \text{или} \quad \Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (16)$$

Для удобства обозначения Δx будем называть дифференциалом аргумента, т.е. $\Delta x \equiv dx$. Дифференциал dx не является строго определенной численной величиной, а варьируется по нашему желанию в широких пределах. Поэтому значения дифференциала dy также произвольны и равны значению dx , умноженному на коэффициент пропорциональности $f'(x)$.

Пример. $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$, при $x = 2$ $y' = 4$ и

dx	0.001	0.1	2	40
dy	0.004	0.4	8	160

Определение *производной по Ньютону* (1685 г.). Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется отношение двух дифференциалов

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad (17)$$

Вычислить дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x значит умножить производную $f'(x)$ в этой точке на dx.

По методу Ньютона вычисление производной сводилось к процедуре выделения линейной по Δx части приращения функции Δy и вся методика была названа дифференциальным (разделительным) исчислением.

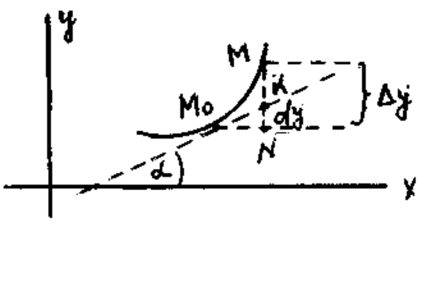
Свойства дифференциалов:

1) $\mathbf{d(c) = (c)'dx = 0}$
2) $\mathbf{d(u + v) = (u + v)'dx = (u' + v')\,dx = du + dv}$
3) $\mathbf{d(u\,v) = (u\,v)'dx = (u'v + u\,v')\,dx = vdu + udv}$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)dx = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$
5) $\mathbf{d(c\,u) = (c\,u)'\,dx = cu'dx = cdu}$
6) $\mathbf{dy = d[f(u(x))] = f'_u \cdot u'_x\,dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx = \frac{df}{du}du$ или $\mathbf{dy = f'(u)\,du = f'(x)\,dx}$

Это свойство инвариантности формы дифференциала. Дифференциал функции можно вычислять несколькими способами: изменим независимую переменную x, тогда, из $dx \Rightarrow du \Rightarrow dy$ или будем изменять сразу сложный аргумент u, тогда, из $du \Rightarrow dy$.

Геометрический смысл дифференциала

На графике функции $y = f(x)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$ проведем касательную под углом α к оси Ox, тогда $tg\alpha = f'(x_0)$. Приращению Δx отвечает полное приращение ординаты кривой Δy, в тоже время, приращение ординаты касательной равно $KN = M_0N\, tg\alpha = \Delta x\, f'(x) = dy$



Приращение функции Δy в точке x показывает величину изменения ординаты y при движении вдоль графика функции, а <u>дифференциал функции dy в точке x показывает величину изменения ординаты y при движении вдоль касательной, проведенной к этой точке.</u>

Замена Δy на dy означает переход от неравномерного движения вдоль кривой в окрестности точки x к равномерному прямолинейному движению по касательной к этой точке.

Логарифмическое дифференцирование.

В показательно-степенную функцию аргумент входит и в основание и в степень $y = u(x)^{v(x)}$. Перед дифференцированием такой функции надо вычислить ее логарифм $\ln y = v(x)\ln u(x)$. Тогда

$(\ln y)' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\,u'(x)/u(x) = y'/y$ или

$$y' = y\,[v'(x)\ln u(x) + v(x)\,u'(x)/u(x)]$$

Пример. Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{7 - x^3}}$; **б)** $y = \left[3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right]^4$; **в)** $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{5x - 1}{5x + 1}}$;

г) $y = x^x$; **д)** $e^y + e^{-x} + xy = 0$.

Решение.

а) Используя правило дифференцирования дроби, получим:

$$y' = \frac{\left(3x^2 + x - 4\right)' \cdot \sqrt{7 - x^3} - \left(\sqrt{7 - x^3}\right)' \cdot \left(3x^2 + x - 4\right) \cdot}{\left(\sqrt{7 - x^3}\right)^2}$$

. Вычислим далее производные каждого из выражений $\left(3x^2 + x - 4\right)'$ и $\left(\sqrt{7 - x^3}\right)'$:

$\left(3x^2 + x - 4\right)' = 6x + 1$; $\left(\sqrt{7 - x^3}\right)' = \dfrac{-3x^2}{2\sqrt{7 - x^3}}$. Будем иметь:

$$y' = \frac{(6x + 1) \cdot \sqrt{7 - x^3} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{7 - x^3}} \cdot \left(3x^2 + x - 4\right)}{\left(\sqrt{7 - x^3}\right)^2} = \frac{2(6x + 1) \cdot \left(7 - x^3\right) + 3x^2 \cdot \left(3x^2 + x - 4\right)}{2\left(7 - x^3\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{84x - 12x^4 + 14 - 2x^3 + 9x^4 + 3x^3 - 12x^2}{2\left(7 - x^3\right)^{3/2}} = \frac{-3x^4 + x^3 - 12x^2 + 84x + 14}{2\left(7 - x^3\right)^{3/2}}.$$

б) Воспользуемся вначале правилом дифференцирования сложной степенной функции:

$$y' = \left[\left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right)^4\right]' = 4 \cdot \left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right)^3 \cdot \left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right)'.$$

Найдем далее производную разности $\left[\left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right)\right]'$. Производная выражения $3^{\operatorname{arctg}2x}$ есть производная сложной показательной функции. Она равна: $\left(3^{\operatorname{arctg}2x}\right)' = 3^{\operatorname{arctg}2x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2}{1+4x^2}$.

Производная выражения $\ln\left(1+4x^2\right)$ есть производная сложной логарифмической функции. Она равна: $\left[\ln\left(1+4x^2\right)\right]' = \frac{8x}{1+4x^2}$. Окончательно будем иметь:

$$y' = 4 \cdot \left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1+4x^2\right)\right)^3 \cdot \left(3^{\operatorname{arctg}2x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{2}{1+4x^2} - \frac{8x}{1+4x^2}\right) = 4 \cdot \left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1+4x^2\right)\right)^3 \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{1+4x^2}\left(3^{\operatorname{arctg}2x} \cdot \ln 3 - 4x\right) = \frac{8}{1+4x^2}\left(3^{\operatorname{arctg}2x} - \ln\left(1+4x^2\right)\right)^3 . \left(3^{\operatorname{arctg}2x} \cdot \ln 3 - 4x\right).$$

в) Предварительно преобразуем функцию, используя свойство логарифмов: $y = \ln\sqrt[4]{\frac{5x-1}{5x+1}} = \frac{1}{4}\left[\ln(4x-1) - \ln(4x+1)\right]$. Применяя правила дифференцирования разности функций и сложной логарифмической функции, получим: $y' = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4x-1} - \frac{4}{4x+1}\right) = \frac{1}{4x-1} - \frac{1}{4x+1} = \frac{2}{16x^2-1}$.

г) Предварительно прологарифмируем по основанию е обе части равенства ln y = x ln x . Теперь дифференцируем обе части, считая ln y сложной функцией от переменной х: (ln y) ′ = $\frac{1}{y} \cdot y'$ = ln x + $\frac{x}{x}$.
Окончательно имеем:

y′ = y [ln x + 1] = = x^x [ln x + 1] .

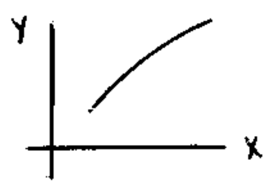
д) При дифференцировании неявно заданной функции учитываем, что y есть функция от x, получим: $e^y \cdot y' - e^{-x} + y + xy' = 0$, откуда $y' = \frac{e^{-x} - y}{x + e^y}$.

Исследование функции на монотонность.

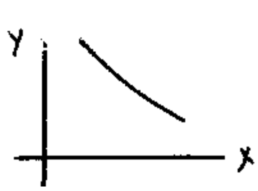
Производная f′(x) является точечной характеристикой зависимой переменной величины y = f(x) , но может быть эффективно использована для общего анализа функции.

Монотонность.

Определение. Функция f(x) на интервале [a,b] *монотонно возрастает*, если при любых $x > x_0$ имеем $f(x) > f(x_0)$ и *монотонно убывает*, если $f(x) < f(x_0)$



Теорема. Необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) функция f(x) на интервале [a,b] служит неравенство



$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ для $x \in [a,b]$.

Экстремумы

Определение. Точка x_0 называется точкой *min* функции $f(x)$, если существует такая δ - окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ - окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Аналогично определяется точка *max* неравенством $f(x) < f(x_0)$. Любое смещение из этих точек в ближайшую окрестность приводит к увеличению (уменьшению) значения функции. Точки *max* и *min* называются *экстремальными* точками.

Необходимое условие экстремума.

Если дифференцируемая в x_0 функция имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или не существует. Это следствие теоремы Ферма.

Производная может обращаться в 0 и в не экстремальных точках .

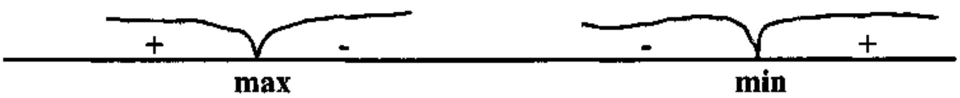
Пример. $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$ или отсутствовать в экстремальной точке

Пример. $y = |x|$, y' - не существует при $x = 0$, а min есть.

Точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует называются *подозрительными* на экстремум (*критическими)* , точки, в которых **$f'(x) = 0$ -** *стационарными.*

Первое достаточное условие существования экстремума.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f(x)$, которая меняет знак при переходе x через критическую точку x_0 .Тогда смена знака с « + » на « - » означает *max* в x_0, а смена с « - » на « + » *min* в соответствии с условиями монотонного возрастания и убывания функции.



Второе достаточное условие существования экстремума.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестностях точки x_0, причем, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то в x_0 имеем *max* , если $f''(x_0) < 0$ и *min*, если $f''(x_0) > 0$.

Точки экстремумов и точки разрыва делят график функции на *интервалы монотонности* и являются граничными точками этих интервалов.

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. Вычисление производной $f'(x)$
2. Определение экстремальных точек из условия $f'(x) = 0$

3. Вычисление второй производной $f''(x)$

4. Определение знака $f''(x)$ в экстремальных точках.

5. Вычисление значения функции в экстремальных точках.

Пример.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 4$$

1. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $x^2 - 4x + 3 = 0$; $\qquad x_1 = 1, \quad x_2 = 3$
3. $f''(x) = 2x - 4$
4. $f''(1) = -2 > 0$ *max* , $\quad f''(-3) = 2 > 0$ *min*
5. $f(1) = -8/3, \qquad f(3) = -4$

***Решение задач на экстремум*.**

Имеем материал на 20 погонных метров забора. Им надо огородить прямоугольный участок. Определить размеры участка, имеющего максимальную площадь.

Решение. Пусть ширина x, тогда длина $10 – x$, а площадь $S = x(10 – x)$. Исследуем ее на экстремум:

1) $S' = 10 – 2x$;

2) $10 – 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 5$;

3) $S'' = -2$;

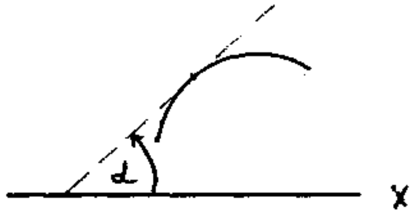
4) $S''(5) = -2 < 0 \Rightarrow \max$;

5) $S(5) = 25$.

Ответ: квадрат со стороной 5 м.

Выпуклость, вогнутость

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* на $[a,b]$, если он расположен ниже касательной, проведенной к любой его точке на $[a,b]$, *выпуклым вниз,* если он расположен выше любой своей касательной.



При изменении x от a к b угол наклона касательных α к *выпуклому вверх* графику уменьшается (вращение в отрицательном направлении по часовой стрелке), а для *выпуклого вниз* графика увеличивается (положительное направление вращения). Но монотонное изменение угла α означает монотонное изменение $tg\alpha = f'(x)$, а условие монотонного изменения функции $f'(x)$ имеет вид $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$). Отсюда следует достаточный признак выпуклости и вогнутости:

При $f''(x)>0$ на $[a,b]$ имеем график "выпуклый вниз"
(28)
при $f''(x) < 0$ на $[a,b]$ имеем график "выпуклый вверх"

Граница между интервалами выпуклости и вогнутости называется *точкой перегиба*.

Необходимый признак точки перегиба.

$f''(x)=0$. Обратное условие $f''(x_0)\neq 0$ означало бы, что x_0 и её окрестность лежат в области выпуклости или вогнутости. Однако, равенство $f''(x) = 0$ может выполняться и вне точек перегиба.

Пример. $y = x^4$, $y''= 12x^2 = 0$ при $x = 0$, но это точка min.

Достаточный признак точки перегиба.

При переходе через точку перегиба $f''(x)$ меняет свой знак, что следует из определения выпуклости и вогнутости

Точка в которой $f''(x) = 0$ или не существует называется подозрительной на перегиб. Она проверяется достаточным признаком.

Пример. $y = \sqrt[3]{x^5}$, тогда $y' = 5/3\, x^{2/3}$, а $y'' = 10/9\, x^{-1/3}$ имеет точку разрыва при $x = 0$, которая делит ось на 2 интервала и поэтому подозрительна на перегиб. Проверка:

$y''(-1) = -10/9$, $y''(1) = 10/9$, т.е. происходит смена знака, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба.

Сводная таблица.

1. $y = f(x)$ - непрерывная, дифференцируемая на $[a,b]$ функция
2. $f'(x) > 0$ на $[a,b]$ - условие возростания функции
3. $f'(x) < 0$ на $[a,b]$ - условие убывания функции
4. $f'(x_0) = 0$ - условие экстремальной точки (теорема Ферма)
5. $f''(x_0) < 0$ - условие *max*
6. $f''(x_0) > 0$ - условие *min*
7. $f''(x) > 0$ на $[a,b]$ - условие "выпуклости вниз"
8. $f''(x) < 0$ на $[a,b]$ - условие "выпуклости вверх"
9. $f''(x) = 0$ - условие точки перегиба

Асимптоты функций

Во многих случаях график функции $f(x)$ при $x\to\infty$ представляет собой кривую, которая вплотную проходит вдоль некоторой прямой. При достаточном удалении от центра такая прямая может приближенно заменить функцию $f(x)$.

Определение. Уравнения типа $x = a$ определяют *вертикальные асимптоты.* Необходимое и достаточное условие их появления $\lim f(x) = \pm\infty$ при $x\to a$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции $y = f(x)$, если разность их ординат стремится к нулю при $x\to\infty$

$$\lim\, [f(x) - (kx + b)] = 0$$

$x \to \infty$

Определим параметры асимптоты k и b. Из определения сразу следует

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] \qquad (29)$$

Вычислим предел $x \to \infty$ от выражения [f(x) - (kx + b)] /x. Он равен нулю и

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (30)$$

Частным случаем наклонной асимптоты является *горизонтальная* асимптота, когда k = 0.

Общая схема исследования функции и построения графика

При построении графика функции y = f(x) полезно выяснить его характерные особенности. Для этого надо:

1. Найти область определения функции, промежутки непрерывности, точки разрыва.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки ее перегиба.
6. Найти точки пересечения с осями координат.
7. Построить график функции.

Пример1. Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график функции.

Решение.

$y = \dfrac{x}{\ln x}$ - кусочно – непрерывная функция.

Решение.

1) D(f) = $(0,1) \cup (1,+\infty)$, x = 1 - точка разрыва.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Находим асимптоты графика функции.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$, т.е. x = 1 - вертикальная асимптота.

Наклонной и горизонтальной асимптоты нет, т.к. $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x} = 0$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$.

4) Находим интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

Условие $y' = \dfrac{\ln -1}{\ln^2 x} = 0$ дает ln x–1= 0 или x = e - подозрительную на экстремум точку, которая вместе с точкой разрыва делит D(f) на 3 интервала монотонности. Составим таблицу, где определим знаки f′ (x) и направление монотонности для каждого интервала

	(0,1)	(1,e)	e	(e,+ ∞)
y	↘	↘	min	↗
y′	-	-	0	+

на (0, 1) $y'(e^{-1}) = -2 < 0 \Rightarrow$ y - убывает ;

на (1, e) $y'(e^{1/2}) = -2 < 0 \Rightarrow$ y - убывает ;

на (e, +∞) $y'(e^2) = 1/2 > 0 \Rightarrow$ y – возрастает.

5) Находим интервалы выпуклости и вогнутости и точки ее перегиба.

Условие $y'' = (-\ln x + 2)/x \ln^3 x = 0$ дает $\ln x = 2$ или $x = e^2$ подозрительную на перегиб точку, которая вместе с точкой разрыва разделяют D(f) на 3 интервала монотонности. Составим таблицу, где определим знак f″(x) и направление выпуклости для каждого интервала.

x	(0,1)	(1,e)	e^2	$(e^2,+\infty)$
y	∩	∪	т. п. $e^2/2$	∩
y″	-	+	0	-

на (0, 1) $y''(1/e) = -3e < 0 \Rightarrow$ y - выпукла вверх;

на (1, e^2) $y''(e) = e^{-1} > 0 \Rightarrow$ y - выпукла вниз;

на (e^2,+∞) $y''(e^3) = -1/27e^{-3} < 0 \Rightarrow$ y - выпукла вверх.

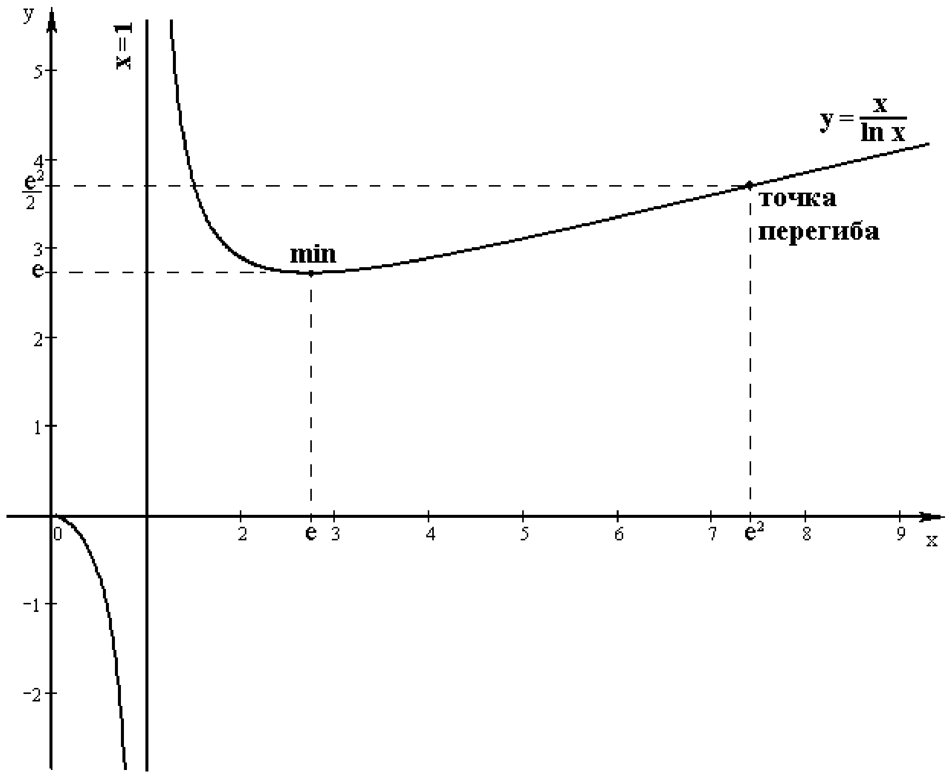
6) Точек пересечения с осями координат нет.

7) Значения функции в граничных точках :

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\ln x} = 0\ ; \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\ln x} = -\infty\ ; \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x}{\ln x} = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

8) Строим график функции



Пример 2: Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить график.

Решение: Исследуем по схеме:

1. Найдем область определения функции $D(f)$, решив уравнение $x^2-1\neq 0$ $\Rightarrow$

   $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Так как $D(f)$ симметрична относительно оси ОУ, то исследуем функцию на четность, нечетность: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-f(x)\Rightarrow$ функция нечетная, график симметричен относительно точки (0; 0).

   Непериодична.

3. Найдем промежутки знакопостоянства, решив уравнение y = 0.

   $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$.

$D(f)$	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y	—	+	—	+
График расположен	ниже оси ОХ	выше оси ОХ	ниже оси ОХ	выше оси ОХ

4. Найдем асимптоты графика:

   а) вертикальные будем искать там, где функция неопределенна, т.е. в точках x=1; x=−1. Для этого найдем односторонние пределы в этих точках.

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\
\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\
\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\
\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)} = -\infty
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$x=1$
$x=-1$ вертикальные асимптоты

б) наклонная асимптота: $y = kx + b$

$$\boxed{\begin{array}{l} k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}; \\ b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)\end{array}}$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

следовательно $y = x$ - наклонная асимптота.

5. Исследовать функцию на монотонность (возрастание, убывание) и точки экстремума.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$D(f)$	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; -1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не сущ.	–	0	–	не сущ	–	0	+
$f(x)$	↗	т.max	↘	экст. нет	↘	экст. нет	↘	экст. нет	↘	т.min	↗

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -1{,}5\cdot 1{,}7 \approx -1{,}55$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 1{,}5\cdot 1{,}7 \approx 1{,}55$$

.

7) $f''(x)=\dfrac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\,2\,(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$

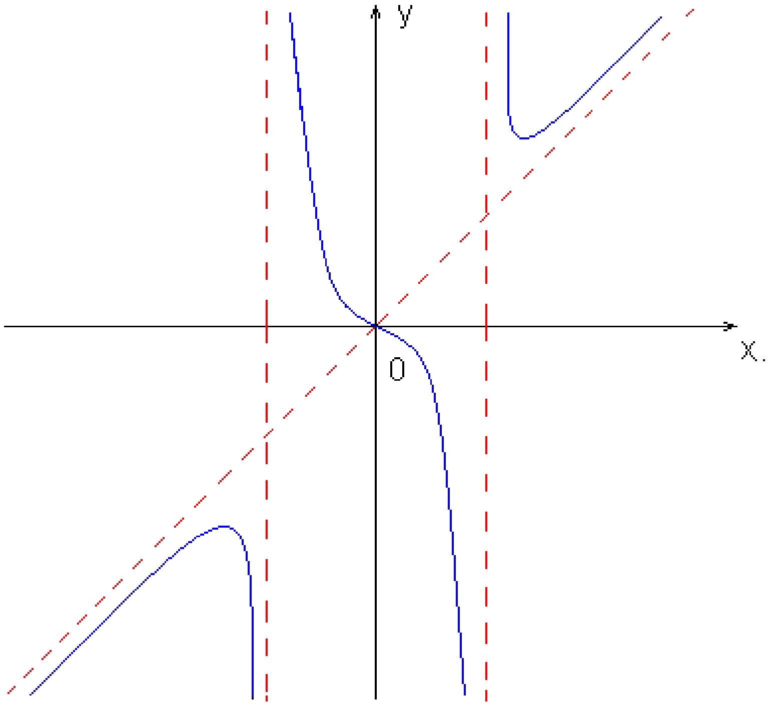
$=\dfrac{(x^2-1)(4x^3-6x)(x^2-1)-4x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4}=\dfrac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=$

$\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=$

$=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; $f''(x)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x\neq\pm1 \end{cases}$

$D(x)$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$f''(x)$	$-$	не сущ.	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$
$f(x)$	$\cap$	перег. нет	$\cup$	перег.	$\cap$	перег. нет	$\cup$

Построим график по нашему исследованию.



Самостоятельная работа № 3. Интегральное исчисление, объем часов 4.

Задание 1. Работа с конспектом лекции для подготовки к практическому занятию. Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте основную задачу интегрального исчисления.

2. Какая функция называется первообразной для функции f(x)?
3. Что называют неопределенным интегралом от функции f(x)?
4. Какая операция называется операцией интегрирования?
5. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
6. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов
7. Расскажите об интегрировании с использованием подведения под знак дифференциала.
8. Расскажите об интегрировании с использованием подстановок.
9. Расскажите об интегрировании по частям.

Задание 2. Решение задач на нахождение неопределенного(непосредственно, введение новой переменной, по частям)

1) Вычислите: а) $\int(3x^{-4}+8x^{-5})dx$; б) $\int(7-6x)^3dx$; в) $\int\ln 3x\,dx$; г) $\int(e^x-2x)dx$; д) $\int\cos 4x\,dx$; е) $\int\ln(x+3)dx$.

Задание 3. Решение несложных задач на определение различных величин с помощью интегралов

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:
а) $y=x^2$, $y=49$; б) $y=x^2+1$, $x=-2$, $x=2$

Форма контроля: устный опрос, проверка домашнего задания.

Методические указания по ходу выполнения работы

Первообразная и интеграл

<u>**Определение:**</u> Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

<u>**Определение:**</u> **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

<u>**Свойства:**</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int(u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример 1: Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3dx - 3\cdot\int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\cdot x^2 - \cos x + C$$

Пример 2: Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x}dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3 + 2x - x^2}{x}dx = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2x}{x}dx - \int \frac{x^2}{x}dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x} + 2\cdot\int dx - \int xdx = 3\ln x + 2x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + c$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример 3: Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную $t = 3x-4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл

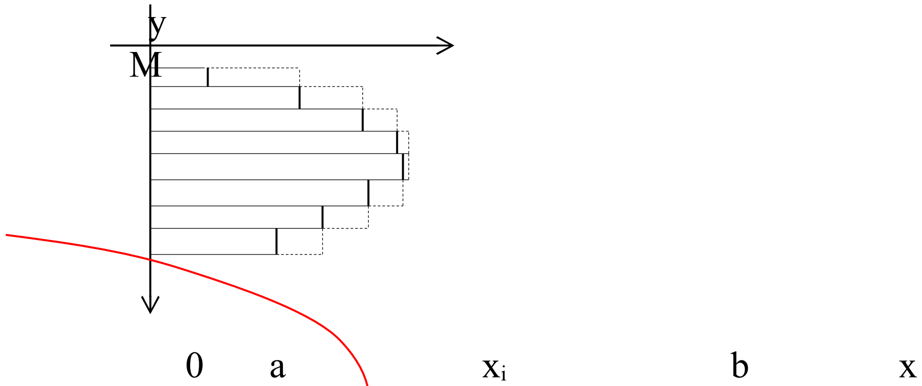
(вместо выражения $3x$-4 подставим t, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x$-4), получим окончательный ответ.

<u>Определенный интеграл</u>.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$x_0 < \varepsilon_1 < x_1$, $x_1 < \varepsilon < x_2$, … , $x_{n-1} < \varepsilon < x_n$.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$
4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

   $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Вычислить определенный интеграл можно по формуле

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона – Лейбница.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$

Решение: Определенный интеграл от любой непрерывный функции *f(x)* вычисляется по ***<u>формуле Ньютона-Лейбница</u>***

$$\int f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где *F(x)* – первообразная для *f(x).*

Проинтегрируем сначала соответствующий неопределенный интеграл по частям, положив *u=x, dv=sin x dx.*

$$\int x\sin x dx = \int x d(-\cos x) = x(-\cos x) -$$
$$-\int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

И по формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$I = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0\cos 0 + \sin 0) = 1.$$

Пример 2. Найти $I=\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Решение: Находя первообразную с помощью замены переменной при вычислении определенного интеграла, не следует забывать, что, изменив переменную, придется изменить и ее пределы интегрирования.

Обозначим $t=\sqrt{x}$, тогда $x=t^2$, $dx=2tdt$, но при *x=0, t=0*, а при *x=4, t=2.* Следовательно, в новом интеграле, относительно переменной *t* изменяются пределы интегрирования:

$$I=\int\limits_0^2 \frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int\limits_0^2 1dt-2\int\limits_0^2 \frac{dt}{t+1},$$

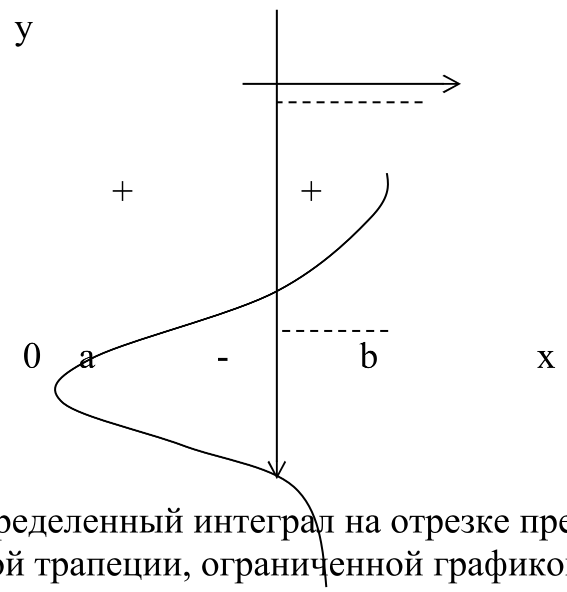
но так как *dt=d(t+1)*

$$I=2\int\limits_0^2 dt-2\int\limits_0^2 \frac{d(t+1)}{t+1}=2t\Big|_0^2-2\ln|t+1|\Big|_0^2=$$

$$=2(2-0)-2\left[\ln(2+1)-\ln(0+1)\right]=4-2\ln 3.$$

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.



Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

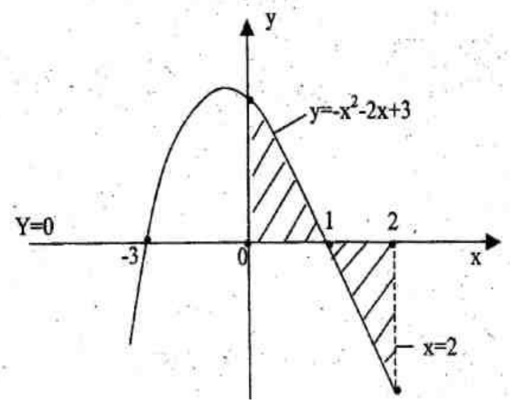
Для нахождения суммарной площади используется формула

$$S=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|.$$

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Пример .: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_0^1+\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-(-\frac{8}{3}-4+6)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Искомая площадь может быть найдена по формуле:

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\text{ (ед}^2\text{)}$$

Самостоятельная работа № 4. Основы дискретной математики, объем часов 8

Задание 1. Решение задач на действия над множествами:

1. Даны множества: A={2; 3; 5}, B={1; 2; 5; 6}.

Осуществить операции:

а) объединения;

б) пересечения;

в) разности.

2. Пусть A={5; 7}, B={3; 4; 5}, C={3; 7}, U={2; 3; 4; 5; 6;7}.

Найти:

а) $A \cup B$

б) $\overline{A} \cap B$

в) (B\A) $\cup$ C.

3. Дано множество A={2; 3; 4}. Найти количество подмножеств.

Задание 2. Систематизация материала: заполнение таблицы «Применение графов в реальной жизни» (номер, область, описание применения)

Задание 3. Задачи для самостоятельного решения:

1) Пусть A – множество корней квадратного уравнения 7 12 0 2 x – x + = . Верна ли запись: а) 3$\in$ A; б) – 5$\in$ A; в) 10$\notin$ A; г) 4$\notin$ A ?
2) A = {1, 2, 3}, B={4, 5, 6}, C={A, B}
   1 $\in$ C ?   4 $\in$ C ?
3) Опишите множество точек M на плоскости, таких, что:
   а) {M OM = R};
   б) {M OM ≤ R};
   в) {M AM = BM};
   г) {M AM = BM = CM}, где O, A, B, C – фиксированные точки плоскости; R – положительное число.

4) Верно ли, что:
   а) {1,2} = {{1, 2}}?
   б) {a } $\subseteq$ {{ a}}?
   в) {1,2,3} $\subseteq$ {{1,2}, {2,3}}?
   г) {{1,2}}$\subseteq$ {{1, 2}, {2,3}}?
   д) 1$\subseteq$ N ? {1}$\subseteq$ N ?
   е) {1,2,3,4,5}$\subseteq$ N ?

5) Дано множество A. Найти P(A) = ? │P(A) │ = ?
   а) A = {a, b, c, d}.
   б) A = {1, 2, {1, 2}}

6) U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, A = {a, b, c, h, i}, B = {a, c, e, f, i}, C = {a, d, e, h, j}. На диаграммах Венна 1 и 2 типа расставить все элементы.

7) Дана пара множеств X и Y, которые образованы тремя произвольными множествами A, B и C при помощи операций над ними. На диаграммах Венна 1 и 2 типа заштриховать множества X и Y и определить отношения между ними. Варианты: X = Y, $X \subseteq Y$, $X \supseteq Y$ или X и Y не сравнимы.
а) X = A \ (B Y C), Y = (A \ B) \ C,
б) X = A Y (B \ C), Y = (A Y B) \ C,
в) X = (A \ B) Y C, Y = A Y (C \ B),
г) X = (A Y B) ⊗ C, Y =(A ⊗ B) Y C

Форма контроля: проверка домашнего задания.

Методические указания по ходу выполнения работы

Определение множества

Математическим анализом называется раздел математики, занимающийся исследованием функций на основе идеи бесконечно малой функции. Основными понятиями математического анализа являются **величина, множество, функция, бесконечно малая функция, предел, производная, интеграл.**
Величиной называется все что может быть измерено и выражено числом.
Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки. Если элемент **x** принадлежит множеству **X**, то записывают $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ($\in$ — принадлежит).
Если множество A является частью множества B, то записывают $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ($\subset$ — содержится).

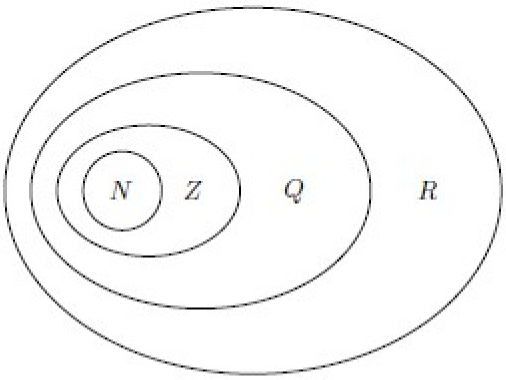
Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.
Например, перечислением заданы следующие множества:
- $A=\{1,2,3,5,7\}$ — множество чисел
- $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ — множество некоторых элементов $x_1,x_2,...,x_n$
- $N=\{1,2,...,n\}$ — множество натуральных чисел
- $Z=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm n\}$ — множество целых чисел

Множество $(-\infty;+\infty)$ называется **числовой прямой**, а любое число — точкой этой прямой. Пусть a — произвольная точка числовой прямой иδ — положительное число. Интервал (a-δ; a+δ) называется **δ-окрестностью точки a**.
Множество X ограничено сверху (снизу), если существует такое число c, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le c$ ($x \ge c$). Число c в этом случае называется **верхней(нижней) гранью** множества X. Множество,

ограниченное и сверху и снизу, называется **ограниченным**. Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества называется **точной верхней (нижней) гранью** этого множества.

Основные числовые множества

N	{1,2,3,...,n} Множество всех **натуральных чисел**
Z	{0, ±1, ±2, ±3,...} Множество **целых чисел.** Множество целых чисел включает в себя множество натуральных.
Q	Множество **рациональных чисел**. Кроме целых чисел имеются ещё и дроби. Дробь — это выражение вида p/q, где **p** — целое число, **q** — натуральное. Десятичные дроби также можно записать в виде p/q. Например: 0,25 = 25/100 = 1/4. Целые числа также можно записать в виде p/q. Например, в виде дроби со знаменателем "один": 2 = 2/1. Таким образом любое рациональное число можно записать десятичной дробью — конечно или бесконечной периодической.
R	Множество всех **вещественных чисел**. Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби. К ним относятся: ▪ число π — отношение длины окружности к её диаметру; ▪ число e — названное в честь Эйлера и др.; Вместе два множества (рациональных и иррациональных чисел) — образуют множество действительных (или вещественных) чисел.



Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым множеством** и записывается **Ø**.

Элементы логической символики

→	"следует", "выполняется"
↔	равносильность утверждения
:	"такой, что"

Запись ∀x: |x|<2 → x^2 < 4 означает: для каждого x такого, что |x|<2, выполняется неравенство x^2 < 4.

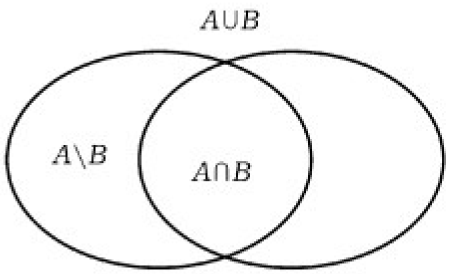
Квантор

При записи математических выражений часто используются кванторы. **Квантором** называется логический символ, который характеризует следующие за ним элементы в количественном отношении.

- $\forall$- **квантор общности**, используется вместо слов "для всех", "для любого".
- $\exists$- **квантор существования**, используется вместо слов "существует", "имеется". Используется также сочетание символов $\exists!$, которое читается как существует единственный.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Два **множества A и B равны** (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.
Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.
Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.
Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.
Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B = \{2,4\}$
Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.
Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}
Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.
Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$



СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Свойства перестановочности
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
Сочетательное свойство
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

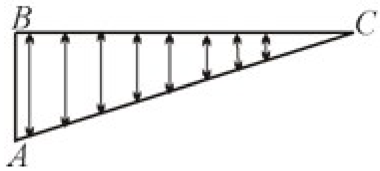
СЧЕТНЫЕ И НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Для того, чтобы сравнить два каких-либо множества A и B, между их элементами устанавливают соответствие.

Если это соответствие взаимооднозначное, то множества называются эквивалентными или равномощными, A B или B A.

Пример 1

Множество точек катета BC и гипотенузы AC треугольника ABC являются равномощными.



Самостоятельная работа № 5. Основы теории вероятностей и математической статистики, объем часов 8.

Задание 1. Изучение и написание конспекта по темам: «Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины», «Понятие о корреляциях о регрессиях».

Задание 2. Решение задач на составления функций распределения для дискретных величин, вычислений математического ожидания и дисперсии случайной величины по заданному закону ее распределения

1)Для случайной величины X с заданной функцией распределения F(x) требуется найти:

а) плотность вероятности;

б) математическое ожидание и дисперсию;

в) построить графики функции распределения и плотности вероятности случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\, x\le 0 \\ \dfrac{(x^3-3x^2+3x)}{2}, при\, 0<x\le 2 \\ 1, при\, x>2 \end{cases}$$

4. Случайная величина X задана законом распределения:

1	2	5
0,3	0,5	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Задание 2. Изучение и написание конспекта по темам: «Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины», «Понятие о корреляциях о регрессиях».

Форма контроля: проверка домашнего задания.

Методические указания по ходу выполнения работы

Случайные события и их вероятности.
Применение комбинаторики к подсчету вероятности.

<u>Пример 1:</u>
В партии из **N** деталей имеется **n** бракованных. **Какова вероятность** того, что среди наудачу отобранных **k** деталей окажется **s** бракованных?
Решение.
Количество всех элементарных исходов равно C_N^k. Для подсчета числа благоприятных случаев рассуждаем так: из **n** бракованных можно выбрать **s** деталей C_n^s способами, а из **N – n** небракованных можно выбрать **k – s** небракованных деталей C_{N-n}^{k-s} способами; по правилу произведения число благоприятных случаев равно $C_n^s C_{N-n}^{k-s}$. Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k} \qquad (1)$$

Замечание:
Всякое **k-членное подмножество n-членного множества** называется **сочетанием из n элементов по k.**
Число различных **сочетаний из n элементов по k** обозначается C_n^k.
Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (2)$$

n! =1·2·3·4·…·n

<u>Пример 2:</u>

В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 стандартных.
Решение.
Искомую вероятность найдем по формуле (1) для случая
N =12, n =7, k = 6, s = 4.

$$p = \frac{C_7^4 C_{12-7}^{7-4}}{C_{12}^6} = \frac{C_7^4 C_5^3}{C_{12}^6} = \frac{\frac{7!}{4!(7-4)!}\cdot\frac{5!}{3!(5-3)!}}{\frac{12!}{6!(12-6)!}} = \frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}}{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}$$

$¿\frac{25}{66}$.

<u>СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.</u>

Случайной называют такую величину, которая принимает значения в зависимости от стечения случайных обстоятельств. Различают ***дискретные*** и случайные ***непрерывные*** величины.

Дискретной называют величину, если она принимает счетное множество значений. (*Пример:* число пациентов на приеме у врача, число букв на странице, число молекул в заданном объеме).

Непрерывной называют величину, которая может принимать значения внутри некоторого интервала. (*Пример:* температура воздуха, масса тела, рост человека и т.д.)

Законом распределения случайной величины называется совокупность возможных значений этой величины и, соответствующих этим значениям, вероятностей (или частот встречаемости).

П р и м е р:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_n

или

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
m	m_1	m_2	m_3	m_4	...	m_n

Числовые характеристики случайных величин.

Во многих случаях наряду с распределением случайной величины или вместо него информацию об этих величинах могут дать числовые параметры , получившие название ***числовых характеристик случайной величины***. Наиболее употребительные из них:

1.***Математическое ожидание* -** (среднее значение) случайной величины есть сумма произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений:

$$M(X)=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_im_i}{n}=\frac{x_1m_1}{n}+\frac{x_2m_2}{n}+...+\frac{x_im_i}{n}=$$

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+...+x_np_n=\sum_{i-1}^{n}x_ip_i$$

2.***Дисперсия*** случайной величины:

$$D(x)=\frac{(x_1-M(X))^2m_1+(x_2-M(X))^2m_2+...+(x_i-M(X))^2m_i}{n}=$$

$$(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+...+(x_i-M(X))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(M(X)-x_i)^2p_i$$

3.***Среднее квадратичное отклонение***:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

***Правило "ТРЕХ СИГМ"* -** если случайная величина распределена по нормальному закону, то отклонение этой величины от среднего значения по абсолютной величине не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения

$$M(X) \pm 3\sigma$$

Закон гаусса – нормальный закон распределения

Часто встречаются величины, распределенные по ***нормальному закону*** (закон Гаусса). ***Главная особенность***: он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения.

Случайная величина распределена по нормальному закону, если ее ***плотность вероятности*** имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M(x) - x}{\sigma} \right)^2 \right]$$

где

M(X) - математическое ожидание случайной величины;

σ - среднее квадратичное отклонение .

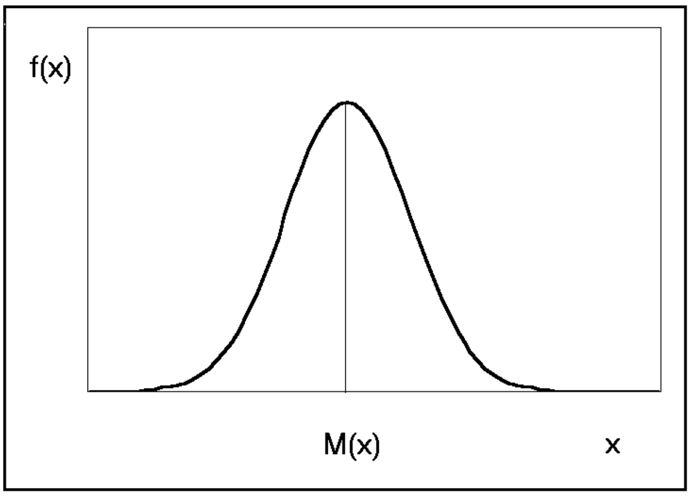


График плотности вероятности нормально распределённой величины

Плотность вероятности (функция распределения) показывает, как меняется вероятность, отнесенная к интервалу ***dx*** случайной величины, в зависимости от значения самой величины: $f(x) = \frac{dP}{dx}$

Основные понятия математической статистики

Математическая статистика - раздел прикладной математики, непосредственно примыкающий к теории вероятностей. Основное отличие математической статистики от теории вероятностей состоит в том, что в математической статистике рассматриваются не действия над законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, а приближенные методы отыскания этих законов и числовых характеристик по результатам экспериментов.

Основными понятиями математической статистики являются:

1. ***Генеральная совокупность;***
2. ***выборка;***
3. ***вариационный ряд;***
4. ***мода;***
5. ***медиана;***
6. ***процентиль,***
7. ***полигон частот,***
8. ***гистограмма.***

Генеральная совокупность - большая статистическая совокупность, из которой отбирается часть объектов для исследования

(*Пример:* все население области, студенты вузов данного города и т.д.)

Выборка (выборочная совокупность) - множество объектов, отобранных из генеральной совокупности.

Вариационный ряд - статистическое распределение, состоящее из вариант (значений случайной величины) и соответствующих им частот.

Пример:

***X*,кг**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m	**2**	**1**	**6**	**8**	**21**	**20**	**18**	**12**	**3**	**4**	**2**	**3**

x - значение случайной величины (масса девочек в возрасте 10 лет);

m- частота встречаемости.

Мода – значение случайной величины, которому соответствует наибольшая частота встречаемости. (В приведенном выше примере моде соответствует значение 24 кг, оно встречается чаще других: m = 20).

Медиана – значение случайной величины, которое делит распределение пополам: половина значений расположена правее медианы, половина (не больше) – левее.

Пример:

1, 1, 1, 1, 1. 1, 2, 2, 2, **3**, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, **7**, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, **8**, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10

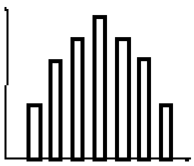
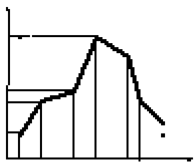
В примере мы наблюдаем 40 значений случайной величины. Все значения расположены в порядке возрастания с учетом частоты их встречаемости. Видно, что справа от выделенного значения 7 расположены 20 (половина) из 40 значений. Стало быть, 7 – это медиана.

Для характеристики разброса найдем значения, не выше которых оказалось 25 и 75% результатов измерения. Эти величины называются 25-м и 75-м ***процентилями***. Если медиана делит распределение пополам, то 25-й и 75-й процентили отсекают от него по четвертушке. (Саму медиану, кстати, можно считать 50-м процентилем.) Как видно из примера, 25-й и 75-й процентили равны соответственно 3 и 8.

Используют ***дискретное*** (точечное) статистическое распределение и ***непрерывное*** (интервальное) статистическое распределение.

Для наглядности статистические распределения изображают графически в виде ***полигона частот*** или - ***гистограммы***.

Полигон частот- ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,m_1), (x_2,m_2), ..., или для ***полигона относительных частот*** – с координатами (x_1,p^*_1), (x_2,p^*_2), ...(Рис.1).

m m_i/n f(x)

x x

Рис.1 Рис.2

Гистограмма частот- совокупность смежных прямоугольников, построенных на одной прямой линии (Рис.2), основания прямоугольников одинаковы и равны ***dx***, а высоты равны отношению частоты к ***dx***, или $\boldsymbol{p^*}$ к ***dx*** (плотность вероятности).

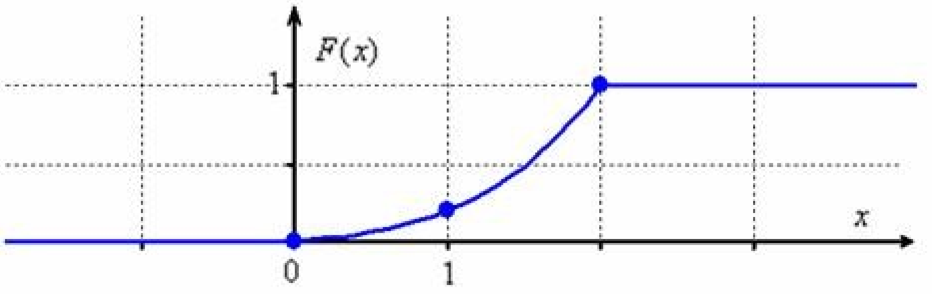
Пример

Непрерывная случайная величина X задана **функцией распределения вероятностей**:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \dfrac{1}{10}(x^3+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 2\\ 1, & \text{если} \quad x>2\end{cases}$$

Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$. И построим ещё графики $F(x)$ и $f(x)$, ну а куда же без них?

Решение начнём с графика функции распределения. При его ручном построении удобно найти промежуточное значение $F(1)=\dfrac{1}{10}(1^3+1)=0,2$ и аккуратно провести кусок **кубической параболы** $y=\dfrac{1}{10}(x^3+x)$:

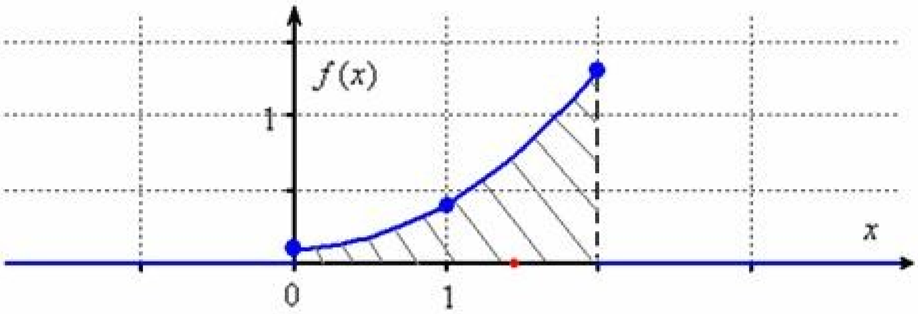


Повторяем: функция распределения $F(x)=P(X<x)$ описывает вероятность того, что случайная величина X примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* x, «пробегающая» все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Данная функция изменяется в пределах $0\le F(x)\le 1$ и **не убывает** *(т. к. «накапливает» вероятности), а также* является **непрерывной** (для НСВ).

Очевидно, что случайная величина X принимает случайные значения из отрезка $[0;\,2]$, и какие из них *более вероятны*, а какие – *менее*, наглядно показывает **функция ПЛОТНОСТИ распределения вероятностей**:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0\\ \dfrac{1}{10}(3x^2+1), & \text{если} \quad 0\le x\le 2\\ 0, & \text{если} \quad x>2\end{cases}$$

И снова опорные точки: $f(0)=\dfrac{1}{10},\ f(1)=\dfrac{4}{10},\ f(2)=\dfrac{13}{10}$ с немедленным чертёжом:



В отличие от $F(x)$ функции плотности может быть разрывна и может принимать значения бОльшие единицы *(как в нашем случае)*; может, как **убывать**, так и **возрастать** и даже иметь **экстремумы** *(наш кусок параболы растёт)*. Однако, она неотрицательна: $f(x) \geq 0$ и обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, которое лучше всегда проверять (а то мало ли, опечатка или ошибка). В силу *аддитивности* интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^2 + 0 = \frac{1}{10}(8+2-0-0) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

– данный результат равен заштрихованной **площади** и с вероятностной точки зрения означает тот факт, что случайная величина X ***достоверно*** примет одно из значений отрезка $[0;\ 2]$. Причём, по чертежу хорошо видно, что значения из правой части отрезка гораздо более вероятны, чем значения слева.

И эти вероятности оцениваются кусками площади, а не значениями функции $f(x)$**!!!** (окончательно избавляемся от распространённой иллюзии)

Ради интереса вычислим:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_{0}^{1} f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(x^3+x)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(1+1-0-0) = \frac{1}{5}$$

– вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $[0;\ 1]$

Теперь числовые характеристики. Очевидно, что математическое ожидание *(среднеожидаемое значение)* случайной величины X должно находиться в «живом» отрезке $[0;\ 2]$, причём – ближе к его правому концу (поскольку там выше плотность вероятности). Убедимся в этом аналитически. По формуле вычисления математического ожидания, и в силу того же свойства *аддитивности*:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{2} x(3x^2+1)dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^3+x)dx + 0 =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{10} \cdot (12+2-0-0) - 0 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

– ну что же, вполне и вполне правдоподобно, результат я отметил красной точкой на чертеже.

***! Примечание**: в общем случае (и в этом, в частности) $M(X)$ не делит площадь на 2 равные части!*

Если промежуток конечен, то можно сразу записывать, что матожидание равно **<u>определённому интегралу</u>**:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{10}\int_{0}^{2}x(3x^2+1)dx=...=\frac{7}{5}$$

Дисперсию *(меру рассеяния случайных значений относительно* $M(X)$ *)* вычислим по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(X))^2$$

Сначала удобно разобраться с интегралом, здесь я не буду расписывать подробно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{10}\int_{0}^{2}x^2(3x^2+1)dx=\frac{1}{10}\int_{0}^{2}(3x^4+x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{96}{5}+\frac{8}{3}-0-0\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{288+40}{15}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{328}{15}=\frac{164}{75}$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{164}{75}-\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{164}{75}-\frac{49}{25}=\frac{164}{75}-\frac{147}{75}=\frac{17}{75}\approx 0{,}23$$

И, наконец, среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=D(X)=\sqrt{\frac{17}{75}}\approx 0{,}48$$

Самостоятельно по чертежу оцените, что на интервале $(M(X)-\sigma(X);M(X)+\sigma(X))$ сконцентрирована значительная часть площади – образно говоря, тут находится «гуща событий».

Вот такое вот у нас получилось захватывающее повторение-изучение-исследование!

И коль скоро спрашивалось немного, запишем:

Ответ: $M(X)=\frac{7}{5},\quad D(X)=\frac{17}{75},\quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{17}{75}}\approx 0{,}48$

3. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результаты самостоятельной работы

Оценки за выполнение заданий могут выставляться по пятибалльной системе или в форме зачета и учитываться как показатели текущей успеваемости обучающихся.

Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений		Критерии оценки результата
балл (оценка)	**вербальный аналог**	
5	отлично	Представленные работы высокого качества, уровень выполнения отвечает всем требованиям, теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, выполнены все предусмотренные программой обучения задания.
4	хорошо	Уровень выполнения работы отвечает всем требованиям, теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, все предусмотренные программой обучения задания выполнены, некоторые из выполненных заданий, возможно, содержат ошибки.
3	удовлетворительно	Уровень выполнения работы отвечает большинству основных требований, теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения заданий выполнено, некоторые виды заданий выполнены с ошибками.
2	не удовлетворительно	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые практические навыки работы не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения заданий не выполнено.

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ.

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

I Основные источники

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

2.

— URL: https://urait.ru/bcode/511565

Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт,

II Дополнительные источники

1. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 755 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-16211-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/530620

2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/512668

3. Палий, И. А. Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. А. Палий. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 370 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13522-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/516148

III Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. http://www.nuru.ru/teorver.htm

2 . http://www.reshmat.ru/example_transport_1.html

IV Периодические издания

1. Журнал естественнонаучных исследований. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2013700
2. Журнал педагогических исследований, 2023, № 1. - Текст :

электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2007852

3. Математика, экономика и управление.- https://elibrary.ru/title_about.asp?id=55066
4. Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: математика.- https://elibrary.ru/title_about.asp?id=7624
5. Математика и ее приложения. Журнал ивановского математического общества.- https://elibrary.ru/title_about.asp?id=32863